ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1997

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - MP.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

Le but de ce problème est de montrer que toute fonction, développable en série entière dans un intervalle de centre 0, est la somme d'une série de fonctions $b_n U_n$, $n \geqslant 0$. Les fonctions U_n, $n \geqslant 0$, définies à la première question, sont étudiées de manière plus détaillée à la deuxième. La troisième question introduit les polynômes T_n, $n \geqslant 0$, qui seront utiles à la quatrième question pour établir le résultat annoncé.

1°) Définition des fonctions U_n, $n \in \mathbb{N}$:

a. Soit x un réel quelconque ; soit $f_x : \theta \mapsto f_x(\theta)$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$f_x(\theta) = e^{x \cos\theta} .$$

Démontrer qu'il existe une unique suite $(U_n)_{n \geqslant 0}$, d'applications réelles définies sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto U_n(x)$, telle que la relation ci-dessous ait lieu :

$$\text{pour tous réels } \theta \text{ et } x,\ f_x(\theta) = U_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\cos(n\theta) .$$

Préciser la nature de la convergence de la série ; comparer le réel $U_n(x)$ à la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi} e^{x \cos t}\cos(nt)\, dt$.

b. Démontrer que, pour x réel donné, la série de terme général $(U_n(x))^2$, $n \geq 1$, est convergente ; calculer, en fonction de valeurs prises par la fonction U_0, sa somme V(x) :

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (U_n(x))^2 .$$

c. Pour quelles valeurs de l'entier n, la fonction U_n est-elle paire ou impaire ? Vérifier que, pour tout entier naturel n, la fonction U_n est indéfiniment dérivable ($U_n \in C^\infty(\mathbb{R})$). Comparer les dérivées U'_0 et U'_n, $n \geq 1$, respectivement aux fonctions U_1 et $U_{n+1}+U_{n-1}$.

Étant donné un entier n naturel, soit U_{-n} la fonction définie par la relation :

$$U_{-n} = U_n .$$

d. Démontrer, pour tout couple de réels x et y et tout entier naturel n, la relation :

$$U_n(x+y) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} U_p(x) U_{n-p}(y) .$$

Vérifier que la série obtenue est convergente pour tout couple de réels x et y donnés.

2°) Étude des fonctions U_n :

Soient n et p deux entiers naturels, le résultat ci-dessous est admis :

$$\int_0^\pi \cos^p t \cos(nt)\, dt = \begin{cases} 0, \text{ si } p < n \text{ ou si } n+p \text{ est impair,} \\ \dfrac{\pi}{2^p} C_p^{(n+p)/2}, \text{ si } p \geq n \text{ et si } n+p \text{ est pair.} \end{cases}$$

Autrement dit : l'intégrale n'est différente de 0 que, lorsque l'entier p est égal à n+2q, où q est un entier naturel ; elle vaut alors : $\dfrac{\pi}{2^{n+2q}} C_{n+2q}^{n+q}$.

a. Déterminer le développement en série entière de la fonction U_n dans un voisinage de l'origine.

b. En déduire pour x strictement positif (x>0), l'encadrement :

$$0 < U_n(x) < \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) \frac{x^n}{n!\, 2^n} .$$

c. Déterminer un équivalent de $U_n(x)$ lorsque l'entier n croît vers l'infini.

d. Étudier les variations de la fonction U_n. Préciser la concavité ; donner sur un même dessin les différentes sortes de graphe suivant les valeurs de l'entier n.

3°) Polynômes T_n :

Soit n un entier naturel donné.

a. Démontrer l'existence d'un unique polynôme T_n tel que pour tout réel θ, il vienne : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\,\theta)$. Donner une expression du polynôme T_n ainsi que son degré et sa parité.

b. Démontrer que la fonction T_n est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients polynomiaux. La préciser.

c. Soit φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $\varphi_n(t) = T_n(\mathrm{ch}t)$. Vérifier que la fonction φ_n est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre qui sera précisée. En déduire l'expression de la quantité $T_n(\mathrm{ch}t)$ en fonction de l'expression $\mathrm{ch}(nt)$.

d. Soit p un entier compris entre 0 et n, $0 \leqslant p \leqslant n$; déterminer la relation entre les valeurs prises en 0 par les dérivées d'ordre p et d'ordre p+2 du polynôme T_n : $T_n^{(p)}(0)$ et $T_n^{(p+2)}(0)$.

Calculer, lorsque les entiers n et p sont de parités différentes, les valeurs prises en 0 par les dérivées successives $T_n^{(p)}(0)$.

Sinon les résultats ci-dessous sont admis :

i/ n et p pairs : n= 2m, p= 2q , $T_{2m}^{(2q)}(0)= (-1)^{m+q}\, 4^q\, m\dfrac{(m+q-1)!}{(m-q)!}$.

ii/ n et p sont impairs : n= 2m+1, p=2q+1, $T_{2m+1}^{(2q+1)}(0)= (-1)^{m+q}\, 4^q\, (2m+1)\dfrac{(m+q)!}{(m-q)!}$.

4°) Développement d'une fonction en série de terme général $b_n\,U_n$:

a. Soit t un réel donné ; soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$, la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations suivantes :

$$v_0(x) = U_0(x) \text{ ; pour } n \geqslant 1,\ v_n(x) = 2\,U_n(x)\,\mathrm{ch}(nt) .$$

Démontrer que la série de terme général $v_n(x)$, $n\geqslant 0$, est convergente pour toute valeur du réel x. Soit ψ_t la fonction définie par la somme de la série :

$$\psi_t(x) = U_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\mathrm{ch}(nt) .$$

Démontrer que la fonction ψ_t est continûment dérivable.

En déduire que la fonction ψ_t vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre (rappel : $\mathrm{ch}(a-b) + \mathrm{ch}(a+b) = 2\,\mathrm{ch}a\,\mathrm{ch}b$). En déduire $\psi_t(x)$.

b. Démontrer la relation :

$$\text{pour tout réel } x \text{ et tout réel } y, \quad e^{xy} = U_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)T_n(y).$$

c. Soit p un entier naturel donné ; établir la convergence de la série de terme général $U_n(x)\,|T_n^{(p)}(0)|$, $n \geqslant p$. Soit $R^p(x)$ sa somme :

$$R^p(x) = \sum_{n=p}^{\infty} U_n(x)\,|T_n^{(p)}(0)|.$$

Démontrer la majoration : $R^p(x) \leqslant |x|^p \exp(\frac{x^2}{2})$.

d. Déterminer, pour tout réel x, une suite de réels $g_n(x)$, $n \geqslant 0$, par leurs expressions en fonction des réels $U_n(x)$ et $T_n^{(p)}(0)$, $n \geqslant 0$, $p \geqslant 0$, tels que, pour tous réels x et y, la relation suivante ait lieu : $e^{xy} = \sum_{p=0}^{\infty} g_p(x) y^p$.

e. En déduire les relations suivantes :

$$\text{pour tout réel } x, \ U_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)T_n(0) = 1 \ ;$$

$$\text{pour tout réel } x \text{ et tout entier } n \geqslant 1, \ 2\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\, T_n^{(p)}(0) = x^p.$$

f. Soit f une fonction complexe développable en série entière sur un intervalle ouvert $J =]-R, R[$; R est un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe une suite de nombres complexes b_n, $n \geqslant 0$, tels que la fonction f soit égale, sur l'intervalle J, à la somme de la série des fonctions $b_n U_n$, $n \geqslant 0$: pour tout réel x, appartenant à cet intervalle J :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n U_n(x).$$

Démontrer que la convergence de la série des restrictions des fonctions $b_n U_n$, $n \geqslant 0$, à un intervalle fermé $[-r, r]$ strictement inclus dans l'intervalle J est uniforme.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE