ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. ; suite à l'arrêté du 9 décembre 1997.
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - MP.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ajustement polynomial par la méthode des moindres carrés.

Dans tout le problème, n est un entier naturel différent de 0, $(y_i)_{0\le i\le n}$ une suite finie de n+1 nombres réels ; l'objet du problème est de déterminer, pour tout entier naturel k, les polynômes P de degré inférieur ou égal à k, tels que le réel $\bullet_k(P)$ défini par la relation suivante

$$\bullet_k(P) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - P(i)\right)^2$$

soit minimum et de préciser la valeur m_k de ce minimum.

1°) Application ϕ_k :

Pour tout entier naturel k, soit ϕ_k l'application de $R_k[X]$ dans R^{n+1} qui, à un polynôme P appartenant à $R_k[X]$ fait correspondre le vecteur $(P(0), P(1),\dots, P(n))$ de R^{n+1} : $\phi_k(P) = (P(0), P(1),\dots, P(n))$. Il est admis que cette application ϕ_k est linéaire.

a. Déterminer le noyau de l'application ϕ_k, en discutant suivant les valeurs de l'entier k par rapport à l'entier n ; préciser la dimension du noyau ; établir l'expression des polynômes du noyau lorsque celui-ci n'est pas réduit à $\{0\}$.

b. Étudier, suivant les valeurs de l'entier k, le rang de ϕ_k. Pour quelles valeurs de l'entier k est-elle surjective ? Pour quelle valeur de l'entier k est-elle un isomorphisme ?

2°) <u>Étude préliminaire</u> :

L'entier n est toujours donné ; soit $(y_i)_{0\le i\le n}$ une suite de n+1 réels.

a. Déduire des questions précédentes l'existence et l'unicité d'un polynôme Y appartenant à $R_n[X]$, tel que, pour tout i compris entre 0 et n, $0 \le i \le n$, la relation $Y(i) = y_i$ ait lieu.

Cette notation du polynôme Y associé à la suite $(y_i)_{0\le i\le n}$ est conservée dans la suite.

b. Étant donné un entier p compris entre 0 et n, $0 \le p \le n$, soit ”$_p$ la suite de n+1 réels tous nuls sauf celui de rang p égal à 1 ; il vient :

”$_0$ = (1, 0, … , 0) ; ”$_p$ = (0, …, 1, …, 0) ; ”$_n$ = (0, 0,… , 1).

Démontrer l'existence et l'unicité d'une base L de l'espace vectoriel $R_n[X]$:

$$L = (L_0, L_1, \dots, L_n)$$

telle que pour tout couple d'indices i et j compris entre 0 et n, $0 \le i \le n$, $0 \le j \le n$, la relation $L_i(j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{si } i=j\,, \\ 0\,, & \text{si } i\neq j\,, \end{cases}$ ait lieu.

Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $R_n[X]$ dans la base L ? du polynôme Y dans la base L ?

c. Soit k un entier supérieur ou égal à n ; déterminer la valeur du minimum m_k du réel •$_k$(P) défini par la relation

$$•_k(P) = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - P(i)\right)^2$$

où P est un polynôme de $R_k[X]$. Quels sont les polynômes P de $R_n[X]$ pour lesquels l'expression •$_k$(P) est nulle ?

<u>Dans toute la suite l'entier k est supposé inférieur ou égal à l'entier n ; $k \le n$</u>.

3°) <u>Interprétation de m_k pour $k \le n$</u> :

a. Structure euclidienne de $R_n[X]$:

Prouver l'existence et l'unicité dans $R_n[X]$ d'un produit scalaire, noté $\langle . , . \rangle$ tel que la base L définie à la question 2°.b soit orthonormale. Préciser pour deux polynômes P et Q quelconques de $R_n[X]$ la valeur de $\langle P, Q \rangle$.

Le résultat : $6\sum_{p=1}^{n} p^2 = n(n+1)(2n+1)$ étant admis, calculer les produits scalaires

$\langle 1, 1\rangle$, $\langle 1, X\rangle$ et $\langle 1, X^2\rangle$.

Dans tout ce qui suit, l'espace vectoriel $R_n[X]$ est muni de ce produit scalaire ; dans cet espace euclidien $R_n[X]$, $\langle . , .\rangle$ la norme d'un polynôme P est alors :

$$\|P\| = \sqrt{\langle P, P\rangle}\ .$$

b. Étant donnée une suite $(y_i)_{0\leq i\leq n}$, soit Y le polynôme de l'espace $R_n[X]$ associé à cette suite (question 2°.a). Déduire des conventions précédentes la relation suivante :

$$\bullet_k(P) = \|Y - P\|^2\ .$$

Démontrer l'existence et l'unicité d'un polynôme P_k appartenant à $R_k[X]$ pour lequel le réel $\bullet_k(P)$ est égal à son minimum m_k :

$$m_k = \|Y - P_k\|^2\ .$$

Définir le polynôme P_k au moyen de Y et de $R_k[X]$.

Que dire du polynôme $Y–P_k$ et du sous-espace vectoriel $R_k[X]$? Faire un croquis.

c. Exemples :

i/ k=0 ; déterminer, pour un polynôme Y, image d'une suite donnée $(y_i)_{0\leq i\leq n}$ $(n\geq 1)$, les expressions de P_0 et m_0. Comparer $\|Y\|^2 - \|P_0\|^2$ et m_0.

ii/ k=1 ; l'entier n est supposé impair : n = 2q–1 ; la suite $(y_i)_{0\bullet i\bullet n}$ définie par la relation : $y_i = \begin{cases} 1, \text{ si } 0\leq i\leq q-1, \\ -1, \text{ si } q\leq i\leq 2q-1. \end{cases}$ Déterminer le polynôme P_1.

4°) <u>Détermination de</u> m_k <u>à l'aide d'une base orthogonale de</u> $R_n[X]$:

a. Le but de cette question est de construire une suite unique de polynômes B_0, $B_1, \ldots, B_n$ tels que :

i/ le polynôme B_0 soit égal à 1 ;

ii/ pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n $(k \leq n)$, la suite $(B_0, B_1, \ldots, B_k)$ soit une base du sous-espace vectoriel $R_k[X]$ telle que les polynômes B_i, $0\leq i\leq k$, soient deux à deux orthogonaux ;

iii/ pour k supérieur ou égal à 1, le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme B_k soit égal au coefficient du binôme C_{2k}^{k}.

Déterminer les polynômes B_1 et B_2. La relation $\langle 1, X^3\rangle = (\langle 1, X\rangle)^2$ est admise.

Déterminer le polynôme B_k, lorsque l'entier k varie de 1 à n, à l'aide des polynômes X^k et Q_k, projection du monôme X^k sur $R_{k-1}[X]$. Faire un croquis.
En déduire l'existence et l'unicité d'une base $B = (B_0, B_1, \ldots, B_n)$ de l'espace vectoriel $R_n[X]$ vérifiant les propriétés i, ii et iii.

b. Démontrer, lorsque l'entier k est compris entre 1 et n, $1 \leq k \leq n$, que le polynôme $B_k(n - X)$ (associé à la fonction polynomiale $x \mapsto B_k(n - x)$) est orthogonal au sous-espace vectoriel $R_{k-1}[X]$. En déduire une relation simple entre les polynômes $B_k(n - X)$ et B_k.

c. Déterminer les coordonnées du polynôme P_k, défini à la question 3°.b ($k \leq n$), dans la base B. Que vaut P_n ? En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et n ($1 \leq k \leq n$), les relations :

$$P_k = P_{k-1} + \frac{< B_k , Y >}{\|B_k\|^2} B_k \ ; \quad m_k = m_{k-1} - \frac{(< B_k , Y >)^2}{\|B_k\|^2} .$$

5°) <u>Étude de la famille des polynômes $B_{k,\ k=0,1,\ldots,n}$</u> :

a. Soient k un entier compris entre 2 et n, $2 \leq k \leq n$ et j en entier compris entre 0 et k–2, $0 \leq j \leq k-2$; démontrer l'orthogonalité des polynômes $X.B_k$ et B_j :

$$< X.B_k , B_j > = 0 .$$

b. En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et n–1, $1 \leq k \leq n-1$, l'existence de réels α_k, β_k et γ_k tels que :

$$X.B_k = \alpha_k B_{k-1} + \beta_k B_k + \gamma_k B_{k+1} .$$

c. Déterminer, à l'aide de la question 4°.b, la valeur du réel β_k.

d. Que vaut γ_k ? En déduire la valeur du produit scalaire $<X.B_k, B_{k+1}>$ en fonction de l'entier k et du réel $\|B_{k+1}\|^2$.

e. Déterminer le réel α_k en fonction de l'entier k et des réels $\|B_{k-1}\|^2$ et $\|B_k\|^2$.
Déduire des résultats précédents la relation :

$$B_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} \left\{ B_1.B_k - \frac{k}{2k-1} \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1} \right\} .$$

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE