ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE MP
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E.N.T.P.E. ; suite à l'arrêté du 9 décembre 1997.
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - MP.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 6 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 ; soit $(e_1, e_2,\ldots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel R^n. L'espace R^n est muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien grâce au produit scalaire $(x \mid y)$ défini par la relation :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = {}^tX.Y \;;$$

x et y sont deux vecteurs de R^n de coordonnées respectives $(x_i)_{1 \le i \le n}$ et $(y_i)_{1 \le i \le n}$; X et Y désignent les matrices colonnes associées aux vecteurs x et y.

Soit Z^n le sous-ensemble des vecteurs x de R^n dont les coordonnées dans la base canonique de R^n sont toutes des entiers relatifs :

$$Z^n = \{ x \mid x \in R^n ,\ x = (x_i)_{1 \le i \le n} ,\ x_i \in Z \} .$$

Par définition une "base" de l'ensemble Z^n est une suite $(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n)$ de vecteurs tels que :

i/ La suite $(\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n)$ est une base de l'espace vectoriel R^n ;

ii/ Chaque vecteur ε_i, $1 \le i \le n$, appartient à l'ensemble Z^n ;

iii/ Tout vecteur x appartenant à Z^n est une combinaison linéaire des vecteurs ε_i, $1 \le i \le n$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varepsilon_i \text{ ; les coefficients } \lambda_i,\ 1 \le i \le n, \text{ sont des entiers relatifs.}$$

Soit M une matrice appartenant à l'espace vectoriel réel M(n; R) des matrices carrées d'ordre n ; le réel m_{ij} est le coefficient de la matrice M à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne. Le sous-ensemble des matrices réelles d'ordre n inversibles est noté GL(n; R).

Soit M(n; Z) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de coefficients égaux à des entiers relatifs. Soit GL(n; Z) le sous-ensemble des matrices inversibles de M(n; Z) dont l'inverse appartient à M(n; Z).

$$GL(n; Z) = \{\ M \mid M \quad M(n; Z) \leftrightarrow GL(n; R) \text{ et } M^{-1} \quad M(n; Z)\ \}\ .$$

Notation : soient A, B,… des matrices appartenant à M(n; R), les endomorphismes de R^n associés à ces matrices dans la base canoniques de R^n sont notés *a*, *b*,… .

Soit $S^+(n; R)$ l'ensemble des matrices symétriques A telles que la forme quadratique x-$(x \mid a(x)) = {}^tX.A.X$ soit définie et positive.

Le but du problème est d'établir, pour une matrice A de $S^+(n; R)$, une relation entre le minimum m(A) de la forme quadratique x-$(x \mid a(x)) = {}^tX.A.X$, lorsque x est un vecteur appartenant à Z^n différent du vecteur nul, noté 0, et le déterminant de la matrice A.

Première partie.

Construction d’une "base" de Z^n à partir d'un vecteur donné de Z^n.

I-1°) <u>Déterminant d'une matrice de GL(n; Z)</u> :

Soit M une matrice appartenant à l'espace M(n; Z) ; démontrer que, pour que cette matrice M appartienne à l'ensemble GL(n; Z), il faut et il suffit que le déterminant det(M) de cette matrice soit égal à 1 ou à –1.

I-2°) <u>Un résultat préliminaire</u> :

Soit P l'application de Z∞Z dans Z qui, à deux entiers relatifs a et b, associe l'entier P(a,b) égal :

- au P.G.C.D. des entiers relatifs a et b s'ils sont tous les deux différents de 0,
- à l'entier relatif a ou b lorsque respectivement b ou a est nul ; il vient :

$$P(a, 0) = a\ ,\ P(0, b) = b,\ P(0, 0) = 0\ .$$

Soit x un vecteur appartenant à l'ensemble Z^2 de coordonnées a et b. Établir l'existence d'un endomorphisme *v* de R^2 associé à une matrice V, appartenant à GL(2; Z), telle que l'image du vecteur x par l'endomorphisme *v* soit le vecteur de coordonnées (d, 0) où d est l'entier P(a,b) : $V\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$; poser : $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}$.

I-3°) <u>Recherche de "base" dans Z^n</u> :

Soit x $\left((x_i)_{1\ 4i\ 4n}\right)$ un vecteur appartenant à l'ensemble Z^n, différent de 0, dont les coordonnées différentes de 0 sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble.

a. L'entier n est égal à 2 : démontrer, qu'il existe un endomorphisme *u* de matrice U appartenant à GL(2; Z) tel que le vecteur x soit l'image du vecteur e_1 par *u* :

$x = u(e_1)$. En déduire qu'il existe un vecteur y, appartenant à l'ensemble Z^2, tel que l'ensemble {x, y} soit une "base" de Z^2.

b. L'entier n est supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$) : soit $(d_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ la suite des entiers définis par les relations suivantes :

- $d_{n-1} = P(x_n, x_{n-1})$;
- pour tout entier i compris entre 1 et n–2 ($1 \leq i \leq n-2$), $d_i = P(d_{i+1}, x_i)$.

Pour tout entier k compris entre 1 et n–1 ($1 \leq k \leq n-1$), y^k est le vecteur dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, d_k, 0, \ldots, 0$.

Démontrer l'existence d'un endomorphisme v_{n-1} tel que $v_{n-1}(x) = y^{n-1}$ (de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, d_{n-1}, 0$).

Démontrer, pour tout entier k, l'existence d'un endomorphisme v_k de matrice V_k appartenant à GL(n;Z), telle que l'image du vecteur x par l'endomorphisme v_k, soit le vecteur y^k :

$$v_k(x) = y^k .$$

En déduire l'existence d'un endomorphisme u de matrice U appartenant à GL(n; Z) tel que la relation $x = u(e_1)$ ait lieu.

c. Démontrer qu'il existe n–1 vecteurs $z^2, z^3, \ldots, z^n$ tels que la suite $x, z^2, z^3, \ldots, z^n$ soit une "base" de Z^n.

Deuxième partie

Deux matrices A et B, appartenant à M(n; R), sont dites Z-congruentes si et seulement s'il existe une matrice U appartenant à l'ensemble GL(n; Z) telle que la relation $B = {}^tU.A.U$ ait lieu. Il est admis que cette propriété est une relation d'équivalence notée : A + B.

Soit A une matrice, appartenant à $S^+(n; R)$. L'ensemble des valeurs prises par la forme quadratique $x \mapsto (x \mid a(x)) = {}^tX.A.X$, lorsque x est un vecteur, différent de 0, appartenant à Z^n, est un ensemble de réels strictement positifs. Il est admis que la borne inférieure m(A) de cet ensemble existe et est un réel positif ou nul :

$$m(A) = \inf_{x \neq 0,\ x \in Z^n} (x \mid a(x)) \geq 0 .$$

Le but de cette partie est de montrer que, dans l'ensemble $S^+(n; R)$, toute matrice A est Z-congruente à une matrice B de $S^+(n; R)$ telle que m(B) soit égal au coefficient b_{11}.

II-1°) Propriétés des matrices Z-congruentes :

Soient A et B deux matrices de M(n;R) Z–congruentes. La matrice A appartient à l'ensemble $S^+(n; R)$.

a. Démontrer que la matrice B appartient aussi à l'ensemble $S^+(n; R)$.

b. Établir les relations : det(A) = det(B) , m(A) = m(B).

c. Soit B la matrice définie par la relation : $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Établir que la matrice B appartient à l'ensemble $S^+(2; R)$ (utiliser la forme quadratique associée à cette matrice) ; déterminer le réel m(B).

II-2°) <u>Propriétés du réel m(A)</u> :

Dans cette question la matrice A, associée à l'endomorphisme a, appartient à l'ensemble $S^+(n;R)$.

a. Comparer les réels m(A) et a_{11}. Il est admis qu'il n'existe qu'un nombre fini de vecteurs x appartenant à l'ensemble Z^n tels que la relation $(x \mid a(x))\ 4\ a_{11}$ ait lieu. En déduire l'existence d'au moins un vecteur z appartenant à Z^n vérifiant l'égalité

$$(z \mid a(z)) = m(A)\ .$$

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les coordonnées de ce vecteur z. Démontrer que les coordonnées différentes de 0 sont des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble et que le réel m(A) est strictement positif.

b. Démontrer qu'il existe une matrice B congruente à la matrice A telle que la relation $b_{11} = m(B)$ ait lieu.

Troisième partie

Le but de cette partie est d'établir, pour toute matrice A appartenant à l'ensemble $S^+(n;R)$, une relation simple donnant une majoration du réel m(A) au moyen du déterminant de A. Cette relation est d'abord établie pour les matrices d'ordre 2 en introduisant la définition de matrice "réduite" puis établie pour les matrices d'ordre n.

III-1°) <u>Relations vérifiées par les coefficients d'une matrice de</u> $S^+(2; R)$:

Étant donnée une matrice A symétrique d'ordre 2, soient a, b et c ses coefficients définis par la relation suivante : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

a. Démontrer qu'une matrice A appartient à $S^+(2; R)$ si et seulement si ses coefficients vérifient les relations : $a > 0,\ c > 0$ et $a\,c - b^2 > 0$.

b. Démontrer que, pour qu'une matrice A appartienne à $S^+(2; R)$, il suffit que ses coefficients vérifient les relations : $0 < a,\ \ 2\,|b|\ \ 4\ \ a\ \ 4\ \ c$.

Déterminer le réel m(A) lorsque les coefficients a, b et c vérifient les inégalités ci-dessus.

Une matrice A, appartenant à $S^+(2; R)$, est dite "réduite" lorsque ses coefficients a, b et c vérifient les relations : $0 < a,\ 0 \leq 2b \leq a \leq c$.

III-2°) Matrice "réduite" Z-congruente à une matrice donnée :

Soit $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à $S^+(2; R)$ telle que le réel $m(A_1)$ soit égal au coefficient a_1.

Démontrer qu'il existe une matrice $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, Z-congruente à la matrice A_1, dont les coefficients vérifient les relations : $0 < a_2,\ 2\,|b_2| \leq a_2 \leq c_2$. Établir cette propriété en recherchant une matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où λ est un entier relatif, qui vérifie la relation suivante : $A_2 = {}^tU.A_1.U$.

En déduire qu'il existe une matrice A_3 (appartenant à $S^+(2; R)$), "réduite" et Z-congruente à la matrice A_1.

III-3°) Relation entre les réels m(A) et det(A) :

Démontrer que, pour toute matrice A appartenant à l'ensemble $S^+(2; R)$, les réels m(A) et det(A) sont liés par la relation suivante : $m(A) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\det(A)}$.

Vérifier la relation ci-dessus pour la matrice B définie à la question II-1.c.

III-4°) Matrice B induite par une matrice A :

L'entier n est supposé supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$). Étant donnée une matrice $A = (a_{ij})$ appartenant à l'ensemble $S^+(n; R)$, dont le coefficient a_{11} est différent de 0 ($a_{11} \neq 0$), soit V la matrice dont les coefficients v_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, sont définis par les relations :

$$v_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j, \\ \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, \text{ si } i = 1 \text{ et } j \geq 2, \\ 0, \text{ dans les autres cas.} \end{cases} ;\ V = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient a l'endomorphisme de matrice associée A dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de l'espace vectoriel R^n. Soit f l'endomorphisme défini par les relations :

$$\text{pour tout entier i, } 1 \leq i \leq n,\ f(e_i) = a_{11}\, a(e_i) - a_{1i}\, a(e_1) .$$

a. Démontrer que le sous-espace vectoriel F de R^n engendré par les vecteurs $e_2, e_3, \dots, e_n$ est stable par l'endomorphisme f.

Soit B la matrice d'ordre n–1 associée à la restriction de l'endomorphisme f (notée encore f) au sous-espace vectoriel F dans la base $(e_2, e_3, \ldots, e_n)$. Il est admis que la matrice V, définie ci-dessus vérifie la relation ci-après : $A = {}^tV \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{11}} B \end{pmatrix} V$.

b. Établir la relation qui lie les déterminants des matrices A et B entre eux.

c. Étant donné un vecteur x de R^n : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, soit x_F le vecteur du sous-espace vectoriel F défini par la relation : $x_F = \sum_{i=2}^{n} x_i e_i$. Soit y le vecteur $v(x)$ image du vecteur x par l'endomorphisme v de matrice associée V. Démontrer la relation :

$$(x \mid a(x)) = a_{11} (y_1)^2 + \frac{1}{a_{11}} \left(x_F \mid f(x_F)\right) \ .$$

Démontrer que la matrice B appartient à l'ensemble $S^+(n–1; R)$.

III-5°) <u>Relation entre les réels det(A) et m(A)</u> :

Le but de cette question est d'établir, pour toute matrice A de l'ensemble $S^+(n; R)$, la relation ci-dessous, établie lorsque l'entier n est égal à 2 :

(R) $$m(A) \bullet \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} (\det(A))^{1/n}.$$

a. Deux hypothèses sur la matrice A sont formulées :
- $m(A) = a_{11}$;
- la relation **(R)** ci-dessus est vraie pour la matrice B construite à partir de la matrice A comme à la question précédente.

D'après la question II-2.a, il existe un vecteur $z_F = \sum_{i=2}^{n} z_i e_i$ (appartenant à Z^{n-1}) pour lequel l'égalité $\left(z_F \mid f(z_F)\right) = m(B)$ a lieu.

Démontrer qu'il existe un entier relatif z_1 tel que le vecteur z, de Z^n, défini par la relation : $z = z_1 e_1 + z_F$, est transformé par l'endomorphisme v , de matrice associée V, en un vecteur y ($y = v(z)$) dont la première coordonnée y_1 a une valeur absolue inférieure ou égale à 1/2 : $|y_1|$ 4 1/2.

En déduire que la matrice A vérifie la relation **(R)**.

b. Démontrer, pour toute matrice A de $S^+(n; R)$, la relation **(R)**.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE