ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE PC
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - PC.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 5 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème T est un réel strictement positif ($T > 0$), I est l'intervalle fermé $[0,T]$ ($I = [0, T]$), q une fonction réelle définie et continue sur l'intervalle I. Soit E(I, q) l'équation différentielle suivante :

E(I, q) $\qquad y\delta + q(t)\, y = 0$.

Il est admis que la seule solution u de E(I, q), nulle ainsi que sa dérivée en un point c de l'intervalle I ($u(c) = 0$, $u'(c) = 0$), est la solution nulle.

Si une fonction complexe u, définie sur l'intervalle I, prend la valeur zéro en un point c de l'intervalle I, le point c est dit être un zéro de u ; il est admis que, puisque l'intervalle I est un compact, le nombre de zéros d'une solution u de E(I, q) autre que la solution nulle, est fini.

Dans tout le problème une solution u de E(I, q) est une fonction réelle, définie sur tout l'intervalle I, de classe C^2, solution de l'équation différentielle E(I, q) et différente de la fonction nulle dans I.

L'objet du problème est l'étude des zéros d'une solution u de E(I, q).

Première partie

Le but de cette partie est de trouver un encadrement du nombre des zéros d'une solution de E(I, q).

I-1°) <u>Les fonctions g et θ associées à une solution u</u> :

Soit u une solution de $E(I, q)$ autre que la solution nulle.

a. Soit f la fonction complexe définie sur I par la relation :

$$f(t) = u'(t) + i\, u(t) \ .$$

Est-ce qu'il existe un réel c pour lequel le nombre complexe $f(c)$ est nul ?

b. Démontrer qu'il existe deux fonctions θ et g, définies sur I, de classe C^1, vérifiant les trois conditions suivantes :

i) pour tout réel t de l'intervalle I ($0 \le t \le T$), $u'(t) = g(t) \cos\big(\theta(t)\big)$;

ii) pour tout réel t de l'intervalle I ($0 \le t \le T$), $u(t) = g(t) \sin\big(\theta(t)\big)$;

iii) le réel $\theta(0)$ appartient à l'intervalle $[0, \pi[$: $0 \le \theta(0) < \pi$.

c. Exemple : soient ω une constante positive telle qu'il existe un entier p supérieur ou égal à 2 pour lequel le réel ω est compris entre $(p-\frac{1}{2})\pi$ et $(p+\frac{1}{2})\pi$:

$$(p-\frac{1}{2})\pi \le \omega < (p+\frac{1}{2})\pi.$$

L'intervalle I est l'intervalle $[0, 1]$ et la fonction q est constante et égale à ω^2, ($q(t)=\omega^2$). Déterminer les deux fonctions θ et g pour une solution u de cette équation différentielle vérifiant les conditions : $u(0) = 0$, $u'(0) = \omega$. Préciser l'expression de $\theta(t)$ sur les intervalles suivants :

$$[0, \frac{\pi}{2\,\omega}\ ]\ ,\ ](k-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega},\ (k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}],\ k= 1,\dots, p-1\ ,\ ](p-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}, 1]\ .$$

Déterminer les valeurs prises par la fonction θ aux points en lesquels la fonction u est nulle.

d. Démontrer que les dérivées θ' et g' des deux fonctions θ et g, définies à l'alinéa b, vérifient les relations suivantes :

$$\theta'(t) = \cos^2\big(\theta(t)\big) + q(t)\sin^2\big(\theta(t)\big)\ \ ;\ \ g'(t) = \big(1 - q(t)\big)\, g(t)\sin\big(\theta(t)\big)\cos\big(\theta(t)\big)\ .$$

I-2°) <u>Suite des zéros d'une solution u</u> :

La solution u considérée est supposée posséder exactement n zéros sur l'intervalle semi-ouvert $]0, T]$; ces zéros sont notés : t_1, $t_2, \dots, t_n$ et vérifient les inégalités

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \le T.$$

a. Déterminer pour chaque réel t_k, $1 \le k \le n$, une valeur possible du réel $\theta(t_k)$ et en déduire la valeur du réel $\theta'(t_k)$.

b. Démontrer que la fonction θ est strictement positive sur l'intervalle ouvert $]0, t_1[$. En déduire la valeur du réel $\theta(t_1)$ en utilisant par exemple la valeur du réel $\theta'(t_1)$.

c. Démontrer que la fonction θ est, pour tout entier k compris entre 1 et n–1, $1 \le k \le n-1$, strictement supérieure à $\theta(t_k)$ sur l'intervalle ouvert $J_k =]t_k, t_{k+1}[$ en considérant par exemple la fonction ψ_k définie sur l'intervalle fermé $\bar{J}_k = [t_k, t_{k+1}]$ par la relation : $\psi_k(t) = \theta(t) - \theta(t_k)$.

En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et n–1, $1 \le k \le n-1$, la valeur du réel $\theta(t_k)$.

d. Démontrer les inégalités suivantes : $n\,\pi \le \theta(T) < (n+1)\,\pi$.

I-3°) <u>Une évaluation du nombre de zéros</u> :

Soit n le nombre de zéros d'une solution u dans l'intervalle semi-ouvert]0, T].

a. Démontrer que le réel $\theta(T) - T$ s'exprime au moyen de $\theta(0)$ et de l'intégrale :

$$\int_0^T (q(t) - 1) \sin^2(\theta(t))\, dt .$$

En déduire que le nombre n de zéros de la solution u vérifie l'inégalité suivante :

$$|\, \pi\, n - T \,| \bullet \pi + \int_0^T |1 - q(t)|\, dt .$$

b. Exemple : dans cette question la fonction q est définie sur l'intervalle [0, T] par la relation : $q(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$. Donner un équivalent de l'entier n lorsque le réel T croît vers l'infini.

Deuxième partie

Soient q_1 et q_2 deux fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle I. La fonction q_1 est supposée majorée par la fonction q_2 : pour tout réel t de l'intervalle I, $q_1(t) \le q_2(t)$.

II-1°) <u>Un résultat préparatoire</u> :

Soient θ_1 et θ_2 deux fonctions réelles définies sur l'intervalle I de classe C^1 telles que :

• les valeurs prises en 0 vérifient l'inégalité $\theta_1(0) \le \theta_2(0)$,

• les dérivées θ_1' et θ_2' vérifient, pour tout réel t de l'intervalle I, les relations :

$\theta_i'(t) = \cos^2(\theta_i(t)) + q_i(t)\sin^2(\theta_i(t))$, l'indice i prend les valeurs 1 et 2.

Soit φ la fonction différence de θ_2 et θ_1 : pour tout réel t de l'intervalle I :

$$\varphi(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t).$$

Soit h la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle I en lequel $\varphi(t)$ n'est pas nul par la relation :

$$h(t) = \frac{1}{\theta_2(t) - \theta_1(t)} \left\{ \cos^2(\theta_2(t)) - \cos^2(\theta_1(t)) + q_1(t)\left(\sin^2(\theta_2(t)) - \sin^2(\theta_1(t))\right) \right\}$$

a. Soit c un zéro de la fonction φ : $\varphi(c) = 0$, pour lequel existent un réel α strictement positif ($\alpha > 0$) et un intervalle ouvert J_α, contenu dans l'intervalle I et défini par la relation $J_\alpha = \begin{cases}]0,\ \alpha[\text{ si } c = 0, \\ ]c-\alpha,\ c+\alpha[, \text{ si } 0 < c < T, \\ ]T-\alpha,\ T[, \text{ si } c = T. \end{cases}$ sur lequel la fonction φ n'est pas nulle.

Lorsque le réel t appartient à J_α, $\varphi(t)$ est différent de 0.

Démontrer que la fonction h se prolonge par continuité en ce point c. Déterminer le prolongement $\overline{h}(c)$ obtenu.

Il est admis qu'il existe une fonction $\overline{h}$, définie et continue sur l'intervalle I prolongeant la fonction h ; c'est-à-dire : pour tout réel t pour lequel le réel $\varphi(t)$ n'est pas nul, les réels $\overline{h}(t)$ et $h(t)$ sont égaux.

Établir pour tout réel t de l'intervalle I l'inégalité : $\varphi'(t) \geq \overline{h}(t)\,\varphi(t)$.

b. Soit H la primitive de la fonction $-\overline{h}$ définie sur I nulle en 0 $\big(H'(t) = -\overline{h}(t)\big)$. Soit k la fonction définie par la relation : pour tout réel t de l'intervalle I,

$$k(t) = \varphi(t).\exp\big(H(t)\big).$$

En étudiant cette fonction k par exemple, démontrer la relation : pour tout réel t de l'intervalle I , $\theta_2(t) \geq \theta_1(t)$.

II-2°) Nombre de zéros de deux solutions des équations $E(I, q_1)$ et $E(I, q_2)$:

Par hypothèse l'équation $E(I, q_1)$ a une solution u_1 qui possède n zéros dans l'intervalle semi-ouvert]0, T].

a. Soit u_2 une solution (non nulle) de l'équation $E(I, q_2)$. Démontrer que, si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

i/ $u_1(0) = 0$,

ii/ $u_1(0) \bullet 0$, $u_2(0) \bullet 0$, $\dfrac{u_2'(0)}{u_2(0)} \leq \dfrac{u_1'(0)}{u_1(0)}$,

le nombre de zéros de la fonction u_2 dans l'intervalle]0, T] est supérieur ou égal à n.

b. En déduire l'existence d'une solution de l'équation $E(I, q_2)$ possédant au moins n zéros dans l'intervalle]0, T].

Troisième partie

Étant donnée une fonction q réelle définie et continue sur l'intervalle I, soit q^+ la fonction définie par la relation : pour tout réel t de l'intervalle I $q^+(t) = \sup(0, q(t))$. Il est admis que la fonction q^+ est continue car $q^+(t) = \frac{1}{2}\,(q(t) + |q(t)|\,)$.

III-1°) Une inégalité sur l'intégrale de la fonction q^+ :

Dans cette question la fonction q est supposée telle que l'équation E(I, q) admette au moins une solution possédant sur l'intervalle I deux zéros.

a. Démontrer que l'équation différentielle E(I, q^+) a au moins une solution v (non nulle) possédant sur l'intervalle I au moins deux zéros notés α et β ($\alpha < \beta$).

Dans les trois alinéas qui suivent les réels α et β sont les deux zéros de q^+ mis en évidence.

b. Exprimer, pour tout réel t de l'intervalle I, en fonction des réels α, β et v(t), l'expression A(t) définie par la relation ci-dessous :

$$A(t) = (\beta - t)\int_\alpha^t (s-\alpha)\,q^+(s)\,v(s)\,ds + (t-\alpha)\int_t^\beta (\beta - s)\,q^+(s)\,v(s)\,ds ,$$

c. Dans cet alinéa la fonction v prend des valeurs positives dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$. Justifier l'existence d'un réel t_0, appartenant à l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$ pour lequel la relation, $v(t_0) = \underset{\alpha \le t \le \beta}{\operatorname{Max}}\, v(t)$, a lieu.

Déduire du résultat précédent et de l'alinéa b, la relation :

$$\beta - \alpha \le \int_\alpha^\beta (\beta - s)\,(s-\alpha)\,q^+(s)\,ds .$$

La relation, $\dfrac{(\beta - s)(s-\alpha)}{\beta - \alpha} \le \dfrac{(T-s)\,s}{T}$, pour tout réel s appartenant à l'intervalle $[\alpha,\beta]$ est admise. Établir la relation ci-dessous :

$$T \le \int_0^T t\,(T-t)\,q^+(t)\,dt .$$

d. Démontrer que, si l'équation différentielle E(I, q) admet, comme il a été supposé au début de la question, une solution u présentant au moins deux zéros, l'inégalité établie ci-dessus est valable.

En déduire l'inégalité suivante : $\displaystyle\int_0^T q^+(t)\,dt \ge \frac{4}{T}$.

III-2°) Majoration du nombre de zéros :

Il est supposé que l'équation différentielle E(I, q) admet une solution u (non nulle) qui possède n zéros dans l'intervalle]0, T] ($n \ge 2$) :

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \le T .$$

L'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \ge \frac{(n-1)^2}{T}$ est admise.

Donner un majorant de l'entier n à l'aide de l'intégrale de la fonction q^+ étendue à l'intervalle I.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE