A 2006 MATH. I PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On rappelle que la fonction Gamma est définie pour tout réel $z > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Cette fonction possède les deux propriétés suivantes :

– pour tout réel z strictement positif, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$;
– il est admis que

$$\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

I. Fonctions hypergéométriques

1) Soit z un réel strictement positif. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels α et β pour que la fonction

$$t \longmapsto t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$$

soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Soit z un réel strictement positif. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels α, β pour que la fonction

$$t \longmapsto (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt},$$

soit intégrable sur $]-1, 0[$.

On fixe maintenant deux réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et on définit les fonctions

$$K(z) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}(1+t)^{\beta}e^{-zt} \, \mathrm{d}t,$$
$$I_1(z) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta}e^{-zt} \, \mathrm{d}t,$$
$$I_2(z) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt} \, \mathrm{d}t.$$

pour tout réel strictement positif z.

3) Montrer que I_1 et I_2 sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$I_1' = -K \text{ et } I_2' = -K + I_2. \tag{E}$$

4) Montrer que $zK = \alpha I_1 + \beta I_2$.

5) En déduire que le vecteur $I(z) = \begin{pmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \end{pmatrix}$ est solution d'un système différentiel linéaire sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$I'(z) = \mathcal{A}(z) I(z), \tag{S}$$

où $\mathcal{A}(z)$ est une matrice que l'on explicitera.

6) Montrer que K satisfait sur $\mathbb{R}_+^*$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on explicitera.

On définit les fonctions

$$\begin{aligned}
L(z) &= \int_{-1}^{0} (-t)^{\alpha} (1+t)^{\beta} e^{-zt} \, \mathrm{d}t, \\
J_1(z) &= -\int_{-1}^{0} (-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta} e^{-zt} \, \mathrm{d}t, \\
J_2(z) &= \int_{-1}^{0} (-t)^{\alpha} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

7) Montrer que les fonctions J_1, J_2, L satisfont les mêmes relations que respectivement, I_1, I_2, K définies dans l'équation (E), que le vecteur $J = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$ est solution du même système différentiel que I (voir (S)) et que L satisfait la même équation différentielle que K (trouvée à la question 6).

II. Calcul du Wronskien de (S)

8) Montrer que pour tout $t > 0$ et $z \geq 1$

$$\left|\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\beta-1} - 1\right| \leq \begin{cases} \dfrac{t}{z}\ |\beta-1|(1+t)^{\beta-2}, \text{ si } \beta \geq 2, \\ \\ \dfrac{t}{z}\ |\beta-1|, \text{ si } \beta \leq 2. \end{cases}$$

9) En déduire que pour tous réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ \mathrm{d}t$$

est équivalent à $\Gamma(\alpha)z^{-\alpha}$ quand z tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ \mathrm{d}t \ - \ \Gamma(\alpha)z^{-\alpha}\right) = o(z^{-\alpha}),$$

quand z tend $+\infty$.

10) Montrer, pour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ et pour tout réel z, l'identité :

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ \mathrm{d}t = e^z z^{-\beta} \int_0^{\frac{z}{2}} u^{\beta-1}(1-\frac{u}{z})^{\alpha-1}e^{-u}du.$$

11) En déduire que cette intégrale est équivalente à $\Gamma(\beta)e^z z^{-\beta}$ quand z tend vers $+\infty$.

12) En déduire que

$$\int_{-1}^{0} (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ \mathrm{d}t,$$

est équivalent à $\Gamma(\beta)e^z z^{-\beta}$ quand z tend vers $+\infty$. Pour tous réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $z > 0$ on définit le Wronskien

$$w(z) = \det\begin{pmatrix} I_1(z) & J_1(z) \\ I_2(z) & J_2(z) \end{pmatrix}.$$

13) Donner un équivalent de $w(z)$ quand z tend vers $+\infty$.

14) Montrer que w satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on explicitera.

15) Montrer que, pour tout z réel strictement positif, $w(z) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)z^{-\alpha-\beta}e^z$.

III. Développement en série

16) Montrer que si β est un entier strictement positif

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ \mathrm{d}t = z^{-\alpha-\beta+1}P(z)$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré $\beta - 1$ en la variable z, que l'on explicitera.

Pour tout réel x et tout entier positif n, on pose

$$(x,n) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k),$$

pour $n > 0$ et $(x,0) = 1$.

17) Soient a et b deux réels. On suppose de plus que b n'est pas un entier négatif. Calculer le rayon de convergence de la série entière de terme général

$$u_k = \frac{(a,k)}{k!(b,k)}.$$

On note alors pour tout réel x

$$F(a,b,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a,k)}{k!(b,k)}\ x^k.$$

18) Montrer pour tout réel strictement positif z, l'identité suivante :

$$\int_{-1}^0 (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}F(\alpha,\alpha+\beta,z).$$

19) Montrer directement (sans utiliser la partie I) que la fonction $y(x) = F(a, b, x)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante

$$xy''(x) + (b - x)y'(x) - ay(x) = 0.$$

20) Montrer que si b n'est pas un entier, on peut trouver des réels a' et b' tels que $y(z) = z^{1-b}F(a', b', z)$ soit solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de la même équation différentielle.

FIN DU PROBLÈME