A 2013 MATH I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH.
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH
MINES DE SAINT ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (Filière PC).
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS 2013

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(Durée de l'épreuve : trois heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le flot de Toda

On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, I la matrice unité d'ordre m et e_j le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^m$ dont les composantes sont les δ_{ij}, $i = 1, m$. On rappelle que $\delta_{ij} = 0$ si $j \neq i$ et $\delta_{ij} = 1$ si $j = i$.

On note $(u\,|v\,)$ le produit scalaire des vecteurs u et v de $\mathbf{R}$. Les vecteurs de $\mathbf{R}^m$ seront assimilés à des matrices colonnes ; ${}^t u$ note le transposé du vecteur u.

L'expression : $i = 1, m$ signifie "pour tout i entier tel que $1 \le i \le m$."

1 Tridiagonalisation

Soit u un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^m$; la matrice

$$\mathrm{H} = \mathrm{I} - 2u\,{}^t u, \tag{1}$$

est la matrice de Householder d'ordre m associée au vecteur u.

Question 1 *Montrer que* $\mathrm{H}u = -u$ *et que* $\mathrm{H}v = v$ *dès que* v *est orthogonal à* u.

Question 2 *Démontrer que* H *est symétrique et orthogonale.*

Question 3 *Soit* $g \in \mathbf{R}^m$, *de composantes* γ_i, $1 \le i \le m$, *un vecteur unitaire non colinéaire à* e_1. *On pose* $u = (g - e_1) / \sqrt{2\,(1 - \gamma_1)}$, *montrer que* u *est unitaire et que* $\mathrm{H}g{=}e_1$.

Question 4 *En déduire que si* x *est un vecteur de* $\mathbf{R}^m$ *non colinéaire à* e_1, *il existe un vecteur unitaire* u *et une matrice de Householder associée* H *telle que* $\mathrm{H}x{=}\,\|x\|\,e_1$.

Soient c un réel, Q une matrice symétrique réelle d'ordre $m-1$, q_{21} un vecteur de $\mathbf{R}^{m-1}$ et $\widehat{\mathrm{Q}}{=}\left(\begin{array}{c|c} c & {}^t q_{21} \\ \hline q_{21} & \mathrm{Q} \end{array}\right)$ une matrice définie par blocs. Si H_1 est une matrice de Householder d'ordre $m-1$; on pose $\widehat{\mathrm{H}_1}{=}\left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & \mathrm{H}_1 \end{array}\right)$, où ζ note le vecteur nul dans $\mathbf{R}^{m-1}$, ainsi que $\widehat{\mathrm{S}} = \widehat{\mathrm{H}_1}\widehat{\mathrm{Q}}\widehat{\mathrm{H}_1} = (\widehat{\sigma}_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le m}$.

Question 5 *Montrer que* $\widehat{\mathrm{S}}$ *est semblable à* $\widehat{\mathrm{Q}}$ *et qu'on peut choisir* H_1 *de telle sorte que* $\widehat{\sigma}_{i1} = \widehat{\sigma}_{1i} = 0$ *pour* $i = 3, m$.

On dit qu'une matrice $\mathrm{T}{=}\ (\tau_{ij})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le m}$ est tridiagonale si $\tau_{ij} = 0$ dès que $|i - j| > 1$.

Question 6 *En déduire un procédé permettant de déterminer une matrice tridiagonale symétrique semblable à* $\widehat{\mathrm{Q}}$.

2 Matrices de Jacobi

Une matrice tridiagonale symétrique réelle est encore appelée matrice de Jacobi. Soit

$$\mathrm{T}_0 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m-1} & b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

une matrice de Jacobi d'ordre m. On pose $a_0 = a_m = 0$ et on suppose que $a_i \neq 0$, $i = 1, m-1$. On note $\sigma(\mathrm{T}_0)$ le spectre de T_0, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres.

Question 7 *Soit $\lambda \in \sigma(\mathrm{T}_0)$ et x un vecteur propre associé de composantes ξ_j, $j = 1, m$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\xi_m \neq 0$.*

Question 8 *Démontrer que les sous-espaces propres de* T_0 *sont de dimension* 1. *Quel est le cardinal de $\sigma(\mathrm{T}_0)$?*

3 Paires de Lax

On remplace désormais les a_i et les b_i par des fonctions à valeurs réelles α_i et β_i de la variable réelle t. On pose alors

$$\mathrm{T}(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) & \alpha_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1(t) & \beta_2(t) & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{m-1}(t) & \beta_m(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

ainsi que

$$\mathrm{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1(t) & 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

et on étudie le système différentiel non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T}'(t) = \mathrm{U}(t)\,\mathrm{T}(t) - \mathrm{T}(t)\,\mathrm{U}(t)\,, \ t \in \mathbf{R} \\ \mathrm{T}(0) = \mathrm{T}_0 \text{ donné par (2),} \end{array} \right. \tag{5}$$

dont on admettra qu'il possède une solution et une seule $\mathrm{T}(t)$ définie sur $\mathbf{R}$. Le couple $(\mathrm{T}(t), \mathrm{U}(t))$ constitue une *paire de Lax.*

Question 9 *Etant donnée* $\mathrm{T}(t)$ *solution de* (5), *et donc* $\mathrm{U}(t)$, *démontrer que le système différentiel*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{V}'(t) = \mathrm{U}(t)\,\mathrm{V}(t)\,,\ t \in \mathbf{R} \\ \mathrm{V}(0) = \mathrm{I}, \end{array} \right. \tag{6}$$

admet une solution et une seule $\mathrm{V}(t)$ *sur* $\mathbf{R}$.

Question 10 *Montrer que pour tout* $t \in \mathbf{R}$, *la matrice* $\mathrm{V}(t)$ *solution de* (6) *est orthogonale.*

Question 11 *Montrer que* ${}^{t}\mathrm{V}(t)\mathrm{T}(t)\mathrm{V}(t)$ *est une matrice constante que l'on déterminera. Les valeurs propres de* $\mathrm{T}(t)$ *dépendent-elles de* t ?

On montre facilement, et on admettra, que le système différentiel (5) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i'(t) = \alpha_i(t)\left(\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)\right),\ i = 1, m-1 \\ \beta_i'(t) = 2\left(\alpha_i^2(t) - \alpha_{i-1}^2(t)\right),\ i = 1, m \end{array} \right. \tag{7}$$

avec $\alpha_i(0) = a_i,\ i = 1, m-1,\ \beta_i(0) = b_i,\ i = 1, m$ et $\alpha_0(t) = 0 = \alpha_m(t)\ \forall t \in \mathbf{R}$. C'est le système de Toda.

4 Etude asymptotique

Pour tout réel t, on pose

$$L(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^2(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \beta_i^2(t)\,. \tag{8}$$

Question 12 *Montrer que la fonction* L *est constante. En déduire que les fonctions* β_i *sont bornées sur* $\mathbf{R}$, *soit par* D.

Question 13 *Pour* $1 \leq i \leq m-1$, *montrer que* $2\int_0^t \alpha_i^2(t)\,dt = \sum_{j=1,i}\left(\beta_j(t) - b_j\right)$ *et en déduire que les* α_i^2 *sont intégrables sur* $\mathbf{R}$.

Question 14 *En déduire que les* $\beta_i(t)\,,\, i = 1, m$ *possèdent une limite quand* $t \to \pm\infty$.

Question 15 *Déduire des résultats des questions précédentes que la fonction* $\alpha_i\alpha_i'$ *est intégrable sur* $\mathbf{R}$. *En déduire la limite de* $\alpha_i(t)$ *lorsque* $t \to \pm\infty$.

On note $\chi_t(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{T}(t))$ le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{T}(t)$ et $\lambda_i,\ i = 1, m$ les valeurs propres de T rangées dans l'ordre décroissant.

Les limites de $\beta_i(t)$ pour $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$ seront respectivement notées β_i^+ et β_i^- ; l'ensemble des β_i^+, $i = 1, m$ sera noté B^+ et celui des β_i^- sera noté B^-.

Question 16 *Montrer que pour tout* $\lambda \in \mathbf{R}$, $\chi_t(\lambda)$ *tend vers* $\prod_{i=1,m}\left(\lambda-\beta_i^+\right)$ *(respectivement vers* $\prod_{i=1,m}\left(\lambda-\beta_i^-\right)$*) lorsque* $t \to +\infty$ *(respectivement* $-\infty$*).*

Question 17 *En déduire que* $\sigma(\mathrm{T}) = B^+ = B^-$.

On rappelle que, par hypothèse, $\alpha_i(0) = a_i \neq 0$, $i = 1, m-1$.

Pour i fixé compris entre 1 et $m-1$, on note $A^+ = \{t > 0 \,|\alpha_i(t) = 0\}$ et $A^- = \{t < 0 \,|\alpha_i(t) = 0\}$.

Question 18 *On suppose que* A^+ *n'est pas vide et on pose* $\tau = \inf\{t \,|t \in A^+\}$. *Déterminer la valeur de* $\alpha_i(\tau)$ *et montrer que pour* $t \in \left]0, \tau\right[$, $\alpha_i(t)$ *est du même signe que* a_i.

Question 19 *En supposant toujours que* A^+ *n'est pas vide, montrer que*

$$\forall t \in [0, \tau[\,,\ \Big|\ln|\alpha_i(t)| - \ln|\alpha_i(0)|\Big| \leq 2D\tau.$$

En déduire que nécessairement $A^+ = \varnothing$, *puis que* α_i *ne s'annule en aucun point de* $\mathbf{R}$.

Question 20 *En raisonnant par l'absurde, montrer que* $\beta_{i+1}^+ < \beta_i^+$, $i = 1, m-1$; *en déduire que* $\beta_i^+ = \lambda_i$, $i = 1, m$.

Question 21 *Montrer que si* δ *est choisi tel que* $0 < \delta < \beta_i^+ - \beta_{i+1}^+$, $i = 1, m-1$, *alors il existe* S *et* C *strictement positifs tels que* $\forall s > S$, $|\alpha_i(s)| < Ce^{-\delta s}$, $i = 1, m-1$. *En déduire que pour* $t > S$, $\exists C' > 0$ *tel que* $|\lambda_i - \beta_i(t)| < C'e^{-2\delta t}$, $i = 1, m$.

Fin de l'épreuve