

Mines — 1998

Physique I — MP

Oscillateurs

La rédaction et les questions posée par ce problème amènent l'auteur de ce corrigé à faire de nombreuses remarques négatives que l'on trouvera en note tout au long de ces pages. De plus il faut remarquer que la question 25 qui commande la fin du problème est rédigée d'une façon très discutable.

I. — Oscillateur unidimensionnel

I.1. — Pendule non linéaire sans frottement

I.1.1. — Le moment cinétique de la barre par rapport à Oy , axe fixe autour duquel elle est mobile, est simplement

$$L_y = J_{Oy} \dot{\theta}.$$

Le moment des forces extérieures à la barre en O se limite au moment de la force de pesanteur dont la projection sur Oy est

$$M_y = -\frac{1}{2} mgl \sin \theta.$$

Le théorème du moment cinétique au point fixe O par rapport à l'axe Oy fournit alors l'équation du mouvement

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} mgl \sin \theta = 0,$$

soit encore

$$\underline{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0.} \quad (\text{E}_1)$$

I.1.2. — ⁽¹⁾ L'énergie cinétique de la barre, mobile autour de l'axe fixe Oy , est simplement

$$E_k = \frac{1}{2} J_{Oy} \dot{\theta}^2$$

et son énergie potentielle dans le champ de pesanteur s'écrit

$$E_p = -\frac{1}{2} mgl \cos \theta + E_0,$$

⁽¹⁾ Que fait ici le candidat ayant choisi de déterminer l'équation du mouvement en utilisant un théorème du cours qui se nomme conservation de l'énergie ; peut-être choisit-il de montrer que le système obéit au théorème du moment cinétique ?

où E_0 est une constante fixant l'origine des énergies potentielles. L'énergie mécanique $E = E_k + E_p$ est choisie nulle si la barre est fixe en $\theta = 0$; cela fixe la valeur de E_0 à $\frac{1}{2}mgl$ et

$$E = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{6}ml^2 \left(\dot{\theta}^2 + 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Cette énergie est toujours positive.

La dérivation de la première expression par rapport au temps donne alors

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\theta} \left(\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgl \sin\theta \right) = 0$$

en vertu de (E₁). Le système est donc *conservatif*.

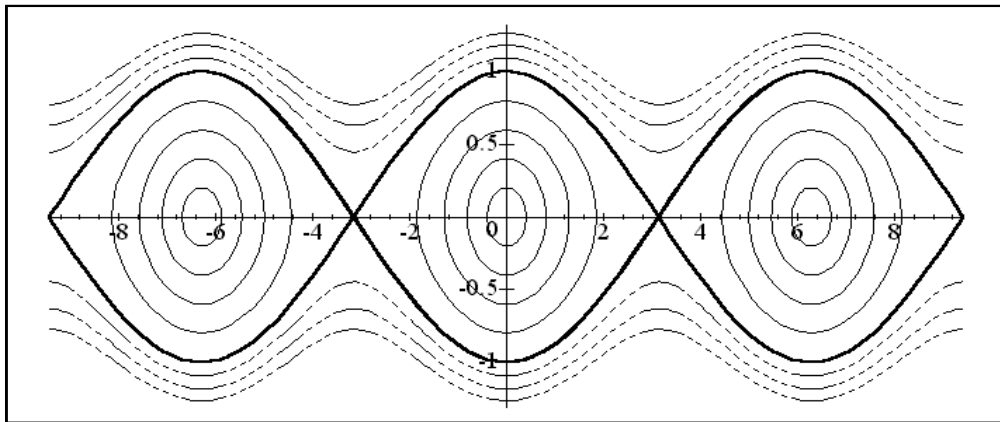
I.1.3. – On peut écrire, d'après ce qui précède,

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{2\omega_0} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{E}{E_{\text{crit}}}. \quad (1)$$

Il est alors aisé de paramétrer les trajectoires de phases par

$$\frac{\dot{\theta}}{2\omega_0} = \sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}}} \cos u \quad \text{et} \quad \theta = 2 \arcsin \left(\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}}} \sin u \right), \quad (2)$$

le domaine de variation de u dépendant de la valeur de l'énergie. Les courbes représentant ces trajectoires sont figurées ci-dessous en trait normal pour $E < E_{\text{crit}}$, en gras pour $E = E_{\text{crit}}$ et en pointillé pour $E > E_{\text{crit}}$. L'axe horizontal mesure θ et l'axe vertical $\frac{\dot{\theta}}{2\omega_0}$.



Les valeurs de l'énergie prises pour ces courbes sont telles que $\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}}} = \frac{2p}{10}$, p variant de 0 à 8.

Pour $E < E_{\text{crit}}$, les courbes sont fermées parcourues (périodicité en u qui varie sur tout l'intervalle réel) dans le sens anti-trigonométrique. Pour s'en assurer, plaçons-nous en $\theta = 0$. Si $\dot{\theta} > 0$ on se trouve à l'intersection de l'orbite et de l'axe vertical dans le demi-plan supérieur et, θ augmentant alors, on se déplace vers la droite ; si $\dot{\theta} < 0$ on se trouve à l'intersection de l'orbite et de l'axe vertical dans le demi-plan inférieur et, θ diminuant, on se déplace vers la gauche.

I.1.4. – Si on communique une petite énergie à un pendule au repos en $\theta = 0$, sa trajectoire dans l'espace des phases sera un petit contour autour du point $(0,0)$. Ce point est donc une position d'équilibre stable.

La première expression du I.1.3. s'écrit

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{2\omega_0}\right)^2 = \frac{E}{E_{\text{crit}}} - \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

D'après ceci et le diagramme de phase $\dot{\theta}$ s'annule et change de signe pour $\theta = \pm\theta_0(E)$, où

$$\sin \frac{\theta_0}{2} = \sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}}},$$

et sur chacun des quatre intervalles de variation de θ , à savoir $[0 \rightarrow \theta_0]$, $[\theta_0 \rightarrow 0]$, $[0 \rightarrow -\theta_0]$ et $[-\theta_0 \rightarrow 0]$, on a

$$\dot{\theta} = \pm 2\omega_0 \sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Les durées de parcours de ces quatre intervalles sont toutes données (par des changements de variable évidents) par

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1}{2\omega_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = -\frac{1}{2\omega_0} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2\omega_0} \int_0^{-\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \end{aligned}$$

puisque θ croît sur le premier et le dernier intervalle alors qu'il décroît (signe $-$) sur les deux autres. La période est donc égale à $4\Delta t$, soit

$$T(E) = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0(E)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}},$$

où $\omega_0 T_0 = 2\pi$.

I.1.5. – Revenons à la paramétrisation (2). Si $E \ll E_{\text{crit}}$, on peut développer l'expression de θ au premier ordre en $\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}}}$, soit $\theta = 2\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}}} \sin u$. En dérivant cette expression par rapport au temps et en comparant à la paramétrisation de $\dot{\theta}$ on trouve

$$2\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}}} \dot{u} \cos u = 2\omega_0 \sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}}} \cos u,$$

d'où $\dot{u} = \omega_0$ et

$$\theta = 2\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}}} \sin \omega_0 t,$$

en choisissant l'origine des temps en $\theta = 0$. L'oscillateur est donc harmonique si $E \ll E_{\text{crit}}$.

I.1.6. – On a représenté de telles orbites sur le schéma précédent. Les orbites du demi-plan supérieur sont caractérisées par $\dot{\theta} > 0$ et sont parcourues vers la droite ; celles du demi-plan inférieur sont parcourues vers la gauche.

On peut parcourir une telle orbite en lançant le pendule de sa position d'équilibre stable $\theta = 0$ avec une vitesse angulaire supérieure à $2\omega_0$.

I.1.7. – Remarquons tout d'abord que $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta}$. Ainsi, $\ddot{\theta}$ est nul à chaque fois que $\dot{\theta}$ est nul **sauf** si la pente de l'orbite dans l'espace des phases est verticale en ce point⁽²⁾.

⁽²⁾ Dans ce cas $\ddot{\theta}$ est indéterminé ; cela impose, pour chaque système que l'on étudie le comportement des courbes au voisinage de $\dot{\theta}=0$. La condition donnée plus loin n'est donc que suffisante et pas toujours nécessaire.

Or les positions d'équilibre sont caractérisées par $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$. Elles correspondent donc aux points d'intersection des orbites avec l'axe des θ qui n'ont pas de pente verticale. À ces points, il faut bien sûr ajouter les orbites qui se limitent à un point de l'axe horizontal. Ces conditions sont réalisées pour $\theta_k = k\pi$ qui sont les seules positions d'équilibre.

La caractérisation des positions d'équilibre stable peut se faire selon le critère suivant : une petite modification de l'énergie fait passer le système sur une orbite qui reste au voisinage du point d'équilibre. Les seules positions stables sont donc $\theta_p = 2p\pi$.

I.2. – Pendule linéaire avec frottement fluide

I.2.7. – La puissance “fournie” par ce couple est $\Gamma\dot{\theta} = -f\dot{\theta} < 0$. Il correspond donc à une dissipation de l'énergie du système : c'est un frottement.

On rencontre ce type de frottement dans l'étude du mouvement d'objets animés d'une faible vitesse dans un fluide visqueux (formule de Stokes). Ce type de frottement modélise aussi les interactions entre un électron mobile d'un métal avec le réseau cristallin, ce qui permet de déterminer la conductivité.

I.2.8. – Le théorème du moment cinétique devient

$$J_{Oy}\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}mgl \sin \theta - f\dot{\theta},$$

ce qui donne

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (\text{E}_2)$$

où $\tau = \frac{ml^2}{3f}$.

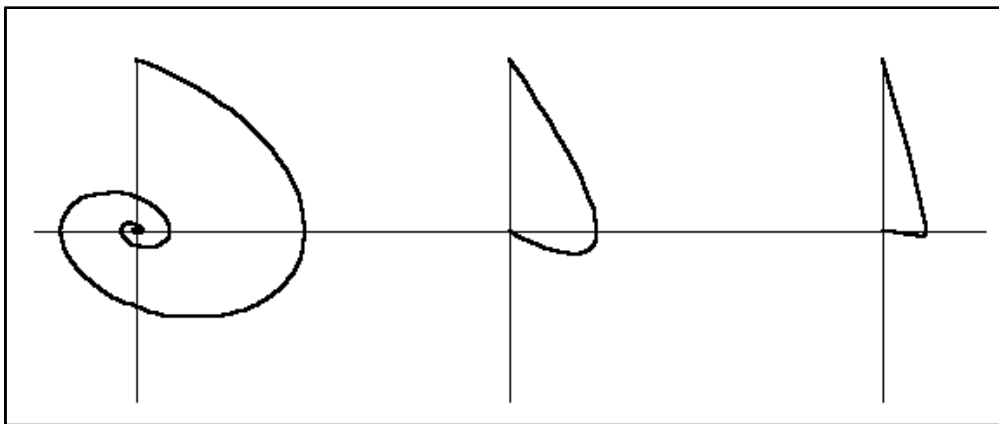
I.2.9. – Si on définit l'énergie par l'expression valide lorsque les frottements sont inexistant, on aura

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl(1 - \cos \theta) \right) = \dot{\theta} \left(J_{Oy}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgl \sin \theta \right) = -f\dot{\theta}^2 < 0$$

L'énergie décroît donc au cours du temps.

Dans le diagramme de phase, cela a pour conséquence que l'état du système passe continûment d'une des orbites sans frottement à une autre d'énergie moindre. L'orbite du système finit donc toujours par atteindre une énergie $E < E_{\text{crit}}$ et donc par converger vers un point d'équilibre stable.

L'allure des orbites est donc, avec les mêmes conditions initiales et pour les régimes pseudo-périodique, critique et amorti (de gauche à droite)



I.2.10. – Si $\tau \gg \omega_0$, l'amortissement est très faible. L'énergie perdue sur une

pseudo-période est très faible devant l'énergie du pendule et on peut considérer que les caractéristiques du mouvement sont pratiquement constantes sur une période.

I.2.11. – **Erreur d'énoncé** : l'énergie moyenne est $\bar{E}(t) = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} E(t') dt'$.

On a alors $\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{E(t+T_0) - E(t)}{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \frac{dE}{dt} dt$. Le I.2.9. permet alors d'écrire $\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{f}{T_0} \int_t^{t+T_0} \dot{\theta}^2 dt = -f\bar{\theta}^2$. Si on se limite au premier ordre en f , on peut alors remplacer $\dot{\theta}$ par sa paramétrisation (2), où l'on peut confondre, toujours à cet ordre d'approximation E et \bar{E} . Il vient alors

$$\bar{\theta}^2 = \frac{4\omega_0^2 \bar{E}}{mgl \cos^2 u} = \frac{3\bar{E}}{ml^2},$$

et

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{\bar{E}}{\tau},$$

soit

$$\underline{\bar{E}(t) = \bar{E}(0)e^{-t/\tau}}.$$

I.2.12. – D'après ce qui précède

$$E(t+T_0) - E(t) = -fT_0\bar{\theta}^2 = -f \int_t^{t+T_0} \dot{\theta} \frac{d\theta}{dt} dt = -f \int_t^{t+T_0} \dot{\theta} d\theta,$$

de sorte que $\underline{E(t+T_0) - E(t) = -fS_\varphi}$, où S_φ est la surface de l'orbite dans l'espace des phases.

Mais on a aussi, $\bar{E} = \frac{ml^2}{3}\bar{\theta}^2 = \frac{ml^2}{3T_0}S_\varphi$, donc $Q = 2\pi \frac{ml^2}{3fT_0}$ et⁽³⁾

$$\underline{Q = \omega_0\tau}.$$

En une période, le système d'énergie E perd une énergie $\frac{2\pi}{Q}E$ et, dans un système oscillant, l'énergie est reliée directement à l'amplitude du mouvement. L'énergie sera donc à peu près nulle au bout de $\frac{Q}{2\pi}$ oscillations ; le facteur de qualité mesure donc le nombre d'oscillations effectuées par le système avant qu'il ne s'arrête.

Ce facteur apparaît aussi dans l'étude des circuits électriques résonants. Il mesure alors la sélectivité du filtre électrique.

II. – Oscillations d'un système à constantes réparties

II.1. – Modélisation du câble coaxial par constantes réparties

II.1.13. – (H₁) n'est valide que si l'on considère des éléments de câble de longueur dx très petite devant la longueur d'onde du signal qu'il transmet. (H₂) sera valide si $\varepsilon_0\omega \ll \gamma$ ⁽⁴⁾.

Selon (H₁) on peut négliger le terme de courant de déplacement dans l'équation $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$.

A.N. : $\delta = 21 \mu\text{m}$. On peut considérer que le courant est surfacique.

⁽³⁾ Il faut visiblement ici justifier l'usage du diagramme de phase en démontrant cela "géométriquement" ; il suffit d'utiliser le résultat précédent pour arriver au même point. Mais il est sûrement beaucoup plus "parlant" de considérer les surfaces des orbites.

⁽⁴⁾ Les caractéristiques de la propagation dans les métaux est évidemment hors programme.

II.1.14. – Le champ électrique étant radial, le théorème de Gauss appliqué à travers un cylindre d'axe Ox , de hauteur dx et de rayon r conduit à $2\pi r dx E_r = 2\pi a_1 dx \sigma_1/\varepsilon$, soit

$$E_r(r, x, t) = \frac{a_1 \sigma_1(x, t)}{\varepsilon r}.$$

De même, le théorème d'Ampère appliqué à un contour circulaire de rayon r et d'axe Ox conduit à $2\pi r B_\theta = \mu_0 \left(j_{s,1} 2\pi a_1 + \varepsilon \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right)$, où Φ_E est le flux du champ électrique à travers le contour. Vu l'orientation choisie des champs, ce flux est nul et

$$B_\theta(r, x, t) = \frac{\mu_0 a_1 j_{s,1}(x, t)}{r}.$$

II.1.15. – L'énergie magnétique contenue dans l'espace interconducteur de hauteur dx est

$$dU_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_{a_1}^{a_2} B_\theta^2 2\pi r dr dx = \pi \int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu_0 a_1^2 j_{s,1}^2}{r} dr dx = \pi \mu_0 a_1^2 j_{s,1}^2 \ln \frac{a_2}{a_1} dx.$$

Or cette énergie doit pouvoir s'écrire $dU_B = \frac{1}{2} L i_1(x, t)^2 dx$, où $i_1 = 2\pi a_1 j_{s,1}$ et L est l'inductance linéique. On en déduit

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}.$$

De même, l'énergie électrique contenue dans le même volume est

$$dU_E = \frac{\varepsilon}{2} \int_{a_1}^{a_2} E_r^2 2\pi r dr dx = \frac{\pi}{\varepsilon} \int_{a_1}^{a_2} \frac{a_1^2 \sigma_1^2}{r} dr dx = \frac{\pi}{\varepsilon} a_1^2 \sigma_1^2 \ln \frac{a_2}{a_1} dx.$$

Cette énergie doit pouvoir s'écrire $dU_E = \frac{1}{2C} dq_1(x, t)^2$, où $dq_1 = 2\pi a_1 \sigma_1 dx$ et C est la capacité linéique. On en déduit

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{a_2}{a_1}}.$$

II.1.16. – Il n'existe pas de mode transverse électromagnétique dans un guide d'onde rectangulaire de section finie. Cependant si la largeur du guide est infinie, un tel mode existe, le champ électrique de l'onde étant perpendiculaire aux parois du guide et le champ magnétique leur étant parallèle. L'espace inter-conducteurs a alors toutes les propriétés du vide, à savoir qu'il est non dispersif, que le rapport des modules des champs est c et que la vitesse de phase est c .

Il en va de même ici, la géométrie des champs par rapport aux parois étant la même, si on imagine que ce guide de largeur infinie s'est "enroulé" sur lui-même⁽⁵⁾.

II.1.17. – Les relations de continuité des champs au niveau du second conducteur donnent $B_\theta(a_2, x, t) = -\mu_0 j_{s,2} = \frac{\mu_0 a_1 j_{s,1}(x, t)}{a_2}$, soit $a_2 j_{s,2} = -a_1 j_{s,1}$. En terme de courant, cela s'écrit

$$i_1(x, t) = -i_2(x, t) = i(x, t) = 2\pi a_1 j_{s,1}(x, t).$$

De même, appliqué au champ électrique, ce raisonnement conduirait à $a_2 \sigma_2 = a_1 \sigma_1$, soit, en notant q_i la charge par unité de longueur de conducteur "i",

$$q_1(x, t) = -q_2(x, t) = q(x, t) = 2\pi a_1 \sigma_1(x, t).$$

⁽⁵⁾ Mathématiquement, il s'agit d'une transformation conforme amenant une certaine géométrie de conducteurs sur une autre ; est-ce ce genre de commentaire qui est demandé ici ?

Notons maintenant $v_i(x, t)$ les potentiels électriques le long des conducteurs. Notons aussi A_i les points de conducteurs repérés par $(r = a_i, \theta = 0, x)$ et par B_i ceux repérés par $(r = a_i, \theta = 0, x + dx)$. Remarquons enfin que le potentiel-vecteur dont dérive \mathbf{B} est

$$\mathbf{A} = -\mu_0 a_1 j_{s,1}(x, t) \ln \frac{r}{a_1} \hat{\mathbf{x}}.$$

Alors on a

$$u(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t) = \int_{A_1}^{A_2} -\mathbf{grad} v(r, x, t) \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_1}^{A_2} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{r}$$

Le potentiel-vecteur étant porté par $\hat{\mathbf{x}}$ et A_1 et A_2 se trouvant à la même cote x , on aura $\int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} = 0$ et

$$u(x, t) = \int_{A_1}^{A_2} \frac{a_1 \sigma_1(x, t)}{\varepsilon r} dr = \frac{q_1(x, t)}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{a_2}{a_1} = \frac{q(x, t)}{C}. \quad (3)$$

De plus, on peut aussi écrire

$$v_1(x, t) - v_1(x + dx, t) = \int_{A_1}^{B_1} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_1}^{B_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

puisque $\mathbf{A} = 0$ sur le conducteur central. Or cette intégrale est juste égale à $R_1 dx i_1(x, t)$, de sorte que

$$v_1(x, t) - v_1(x + dx, t) = R_1 dx i(x, t).$$

Pour évaluer $v_2(x, t) - v_2(x + dx, t)$ il faudra, outre la résistance, prendre en compte le potentiel-vecteur qui n'est pas nul sur le conducteur extérieur. On aura donc

$$v_2(x, t) - v_2(x + dx, t) = R_2 dx i_2(x, t) - dx \mu_0 a_1 \frac{\partial j_{s,1}(x, t)}{\partial t} \ln \frac{a_2}{a_1} = -R_2 dx i(x, t) - L dx \frac{\partial i_1(x, t)}{\partial t}.$$

En soustrayant les deux équations précédentes, on arrive à

$$u(x, t) - u(x + dx, t) = dx \left((R_1 + R_2) i(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \right). \quad (4)$$

Enfin, la conservation de la charge impose que

$$2\pi a_1 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{\partial j_{s,1}}{\partial x} \right) = 0 = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x}. \quad (5)$$

Ainsi, la différence de potentiel $u(x, t)$ entre les deux conducteurs est-elle due à la charge $q dx$ d'un condensateur de capacité $C dx$. Cette charge correspond à un courant $\frac{\partial q dx}{\partial t} = -dx \frac{\partial i}{\partial x} = i(x, t) - i(x + dx, t)$. Ces deux aspects justifient donc la position de la capacité $C dx$ joignant les deux conducteurs.

La variation de $u(x, t)$ le long de l'axe x est due à une résistance $R dx$ où $R = R_1 + R_2$ et une inductance $L dx$, ce qui termine l'équivalence du système avec la cellule quadripolaire proposée. on a donc ramené un problème d'électromagnétisme à un problème d'électrocinétique linéaire⁽⁶⁾.

II.2. – Propagation d'ondes "électriques" dans le câble

II.2.18. – Les équations (3) et (5) conduisent immédiatement à

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{C} \frac{\partial i}{\partial x},$$

⁽⁶⁾ Je n'ai pas trouvé de traitement plus succinct de la question. Peut-être, au vu de la longueur de la réponse et du fait que ce calcul n'est pas "au programme", aurait-il fallu en préciser la démarche par des questions intermédiaires.

alors que l'équation (4) s'écrit

$$\underline{-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}}.$$

II.2.19. – En dérivant la seconde équation par rapport à x et en y reportant la première on a

$$\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -R \frac{\partial i}{\partial x} - L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = RC \frac{\partial u}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}. \quad (\text{E})$$

C'est l'équation des télégraphistes et le courant $i(x, t)$ vérifie la même équation.

La dérivée seconde temporelle modélise l'accélération en mécanique, si on considère que u est un déplacement. Alors le terme en $-\frac{\partial u}{\partial t}$ est équivalent à un frottement fluide agissant sur le système.

Ce modèle est applicable à une chaîne de ressorts si la distance entre les masses est très petite devant la longueur d'onde⁽⁷⁾.

II.2.20. – L'énergie électromagnétique par unité de longueur est

$$w(x, t) = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}Li^2.$$

On a donc, avec (3) (5) et les équations du II.2.18.,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{q}{C} \frac{\partial q}{\partial t} + Li \frac{\partial i}{\partial t} = -u \frac{\partial i}{\partial x} + i \left(-Ri - \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Si on note $\Pi(x, t) = u(x, t)i(x, t)$ la puissance entrant en x , cette équation devient

$$\underline{\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi(x, t)}{\partial x} + p_J(x, t)}.$$

C'est une équation de conservation ; les variations de l'énergie électromagnétique sont dues à la dissipation par effet Joule d'une part et au transfert d'énergie le long de la ligne d'autre part. Ce dernier terme est représenté par la densité de flux $\mathbf{\Pi} = u(x, t)i(x, t)\hat{x}$.

II.2.21. – La vitesse de propagation le long de la ligne est $V_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}$.

L'impédance caractéristique⁽⁸⁾ est $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \ln \frac{a_2}{a_1}$. Le temps caractéristique d'amortissement du signal dû aux dissipations est $\tau = \frac{L}{R}$.

II.2.22. – Numériquement $L = 0,32 \mu\text{H.m}^{-1}$, $C = 8 \text{ nF.m}^{-1}$, $V_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ et $Z_0 = 64 \Omega$.

Pour donner une estimation de la résistance R_1 (ou R_2), on considérera que le courant est uniforme dans la couche cylindrique de rayon a_1 (ou a_2) et d'épaisseur δ . La résistance linéique d'un tube de courant étant $1/\gamma s$ (s est la section du tube de courant) donc $R_1 = \frac{1}{2\pi a_1 \delta \gamma}$ et $R_2 = \frac{1}{2\pi a_2 \delta \gamma}$. On en déduit l'estimation $R \approx 0,31 \Omega.\text{m}^{-1}$, d'où $\tau \approx 1 \mu\text{s}$.

II.2.23. – Le report de l'expression $\underline{u(x, t) = U_0 e^{i(\omega t - kx)}}$ dans (E) conduit immédiatement à

$$\underline{k^2 = \frac{\omega^2}{V_0^2} \left(1 - \frac{i}{\omega\tau} \right)}.$$

⁽⁷⁾ La propagation d'ondes sur un chaîne d'atomes n'est pas au programme et les candidats ne sont pas sensés savoir répondre à cette question.

⁽⁸⁾ Encore une notion dont les candidats devraient avoir connaissance alors qu'elle n'est pas au programme.

Il est naturel d'obtenir une quantité complexe pour $k(\omega)$, la partie imaginaire du vecteur d'onde correspondant à la dissipation le long de la ligne. La partie réelle de k , elle, représente la propagation de l'onde le long du câble.

II.2.24. – Puisque $\omega\tau \approx 65$, on pourra écrire $k \approx \frac{\omega}{V_0} \left(1 - \frac{i}{2\omega\tau}\right)$. Si on note $k_0 = \omega/V_0$ et $\ell = 2V_0\tau$, la solution devient

$$\underline{u}(x, t) = \underline{U}_0 e^{i(\omega t - k_0 x)} e^{-x/\ell}$$

où $\ell \approx 410$ m.

Au bout de $d = 50$ m, l'onde est atténuée d'un facteur $e^{-d/\ell} = 0,89$.

II.3. – Exemple d'oscillations propres dans le câble

II.3.25. – Soit q_1 la charge du condensateur C_1 , prise sur la face reliée à l'âme du câble. La tension au bornes de ce condensateur est u_d , donc $q_1 = C_1 u_d$ et le courant qui le traverse (avec la même orientation que les deux autres courants) est $i_1 = -\frac{dq_1}{dt} = -C \frac{du_d}{dt}$.

On a donc $u(x=0, t) = u_d(t)$ et $i(x=0, t) = S_0 u_d \left(1 - \frac{u_d^2}{3u_0^2}\right) - C_1 \frac{du_d}{dt}$; à l'extrémité du câble, le court-circuit impose $u_d(x=d, t) = 0$. En notation réduites, la première de ces conditions s'écrit

$$\underline{u_d}(t) = u_0 U(0, \theta).$$

La condition sur le courant devient

$$\frac{i(x=0, t)}{u_0} = S_0 U(0, \theta) \left(1 - \frac{U(0, \theta)^2}{3}\right) - \frac{C_1 V_0}{d} \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta},$$

et la condition en $x=d$

$$\underline{U(1, \theta) = 0.}$$

La seconde équation du II.2.18. prise en $x=0$ et divisée par u_0 s'écrit alors

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} &= -\frac{1}{d} \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X=0} = RS_0 U(0, \theta) \left(1 - \frac{U(0, \theta)^2}{3}\right) - \frac{RC_1 V_0}{d} \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta} + \\ &\quad \frac{LV_0}{d} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(S_0 U(0, \theta) \left(1 - \frac{U(0, \theta)^2}{3}\right) - \frac{C_1 V_0}{d} \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta} \right) \\ &= RS_0 U(0, \theta) \left(1 - \frac{U(0, \theta)^2}{3}\right) - \frac{RC_1 V_0}{d} \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta} + \\ &\quad \frac{LV_0 S_0}{d} \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta} (1 - U(0, \theta)^2) - \frac{LC_1 V_0^2}{d^2} \frac{\partial^2 U(0, \theta)}{\partial \theta^2}, \end{aligned}$$

soit, avec $LV_0 = Z_0$ et $LCV_0^2 = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X=0} &= -RS_0 d U(0, \theta) \left(1 - \frac{U(0, \theta)^2}{3}\right) + RC_1 V_0 \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta} \\ &\quad - Z_0 S_0 \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta} (1 - U(0, \theta)^2) + \frac{C_1}{Cd} \frac{\partial^2 U(0, \theta)}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Puisque $RS_0 d = \alpha^2 S$, cela donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} \Big|_{X=0} &= -\alpha^2 S U(0, \theta) \left(1 - \frac{U(0, \theta)^2}{3}\right) + \frac{LC_1 V_0}{\tau} \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta} \\ &\quad - Z_0 S_0 \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta} (1 - U(0, \theta)^2) + \beta \frac{\partial^2 U(0, \theta)}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Or $\frac{LC_1 V_0}{\tau} = \alpha \frac{LC_1 V_0^2}{d} = \alpha \beta$ et $Z_0 S_0 = \frac{RdS}{Z_0} = \frac{LdS}{Z_0 \tau} = \alpha \frac{LV_0 S}{Z_0} = \alpha S$, donc,

$$\left. \frac{\partial U}{\partial X} \right|_{X=0} - \beta \frac{\partial^2 U(0, \theta)}{\partial \theta^2} = -\alpha^2 S U(0, \theta) \left(1 - \frac{U(0, \theta)^2}{3} \right) + \alpha \beta \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta} - \alpha S \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta} (1 - U(0, \theta)^2).$$

Se pose alors le problème de savoir : qui tend vers 0 quand $\alpha \rightarrow 0$? Sans quoi il est **impossible** de démontrer le résultat proposé.

On pourrait par exemple faire les remarques suivantes : on a $\alpha S = S_0 Z_0$ et on peut écrire $\alpha = \frac{d}{V_0 \tau} = \frac{dR\sqrt{LC}}{L} = \frac{Rd}{Z_0}$, donc

- si α tend vers 0 du fait que Z_0 tend vers l'infini, le facteur αS tend vers l'infini et ne peut évidemment être négligé (non plus que $\alpha^2 S$ devant $\alpha \beta$) ;
- si Z_0 reste fini, αS reste fini, ce qui amène les mêmes remarques ;
- si Z_0 tend vers 0 (mais moins vite que le produit Rd pour que $\alpha \rightarrow 0$), alors $a_2 \rightarrow a_1$ et $C \rightarrow \infty$, donc $\beta \rightarrow 0$ aussi vite que Z_0 , et $\alpha \beta \ll \alpha S$.

Dans tous les cas de figure la relation proposée est indémontrable.

En fait, l'hypothèse qui s'impose à l'esprit immédiatement est que la résistance du câble est suffisamment faible (dans le sens $Rd \ll Z_0$) pour ne tenir compte que du premier ordre en R . Dans ce cas, comme le montre le début du calcul mené plus haut, il faut garder TOUS les termes ! Cette hypothèse seule est insuffisante : il faut EN OUTRE supposer que le facteur S_0 est très petit (dans le sens $S_0 Z_0 \ll 1$).

Il eut été plus judicieux, dans un problème de physique, de préciser quelles grandeurs physiques (résistance linéique du câble, conductance dynamique de la diode...) sont petites devant quelles autres plutôt que de faire tendre vers 0 un paramètre non indépendant d'autres paramètres dont le sens physique n'est pas forcément clair (S ?).

Avec les hypothèses $Rd, \frac{1}{S_0} \ll Z_0$ et S restant fini, on arrive bien à

$$\left. \frac{\partial U}{\partial X} \right|_{X=0} - \beta \frac{\partial^2 U(0, \theta)}{\partial \theta^2} = \alpha \{ \beta - S [1 - U(0, \theta)^2] \} \frac{\partial U(0, \theta)}{\partial \theta}. \quad (6)$$

On peut écrire ici l'équation de propagation dans les variables réduites. L'équation (E) devient

$$\frac{u_0}{d^2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{RCu_0 V_0}{d} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{LCu_0 V_0^2}{d^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \frac{u_0}{d^2} \left(RCdV_0 \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right),$$

soit, avec $RCdV_0 = LCV_0^2 \alpha = \alpha$,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \alpha \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}. \quad (7)$$

II.3.26. – Selon ce qui a été précisé plus haut, on prend $R = 0$ et $S_0 = 0$; la diode ne joue aucun rôle dans ce qui suit. Dans ce cas, l'équation et les conditions aux limites que vérifie $U(X, \theta)$ sont linéaires et l'on peut passer en notation complexe⁽⁹⁾.

On a alors $\underline{f}''(X) = -\Omega^2 \underline{f}(X)$, donc

$$\underline{f}(X) = \underline{f}_1 e^{i\Omega X} + \underline{f}_2 e^{-i\Omega X}$$

(qui a bien l'allure demandée) ; en portant ceci dans les conditions aux limites, il vient $\underline{f}(1) = 0$ et $\underline{f}'(0) + \beta \Omega^2 \underline{f}(0) = 0$. On tire de la première condition que \underline{f}_1 et \underline{f}_2 s'écrivent

$$\underline{f}_1 = \underline{U}_1 e^{-i\Omega} \quad \text{et} \quad \underline{f}_2 = -\underline{U}_1 e^{i\Omega},$$

⁽⁹⁾ On remarquera en passant que $\sqrt{-1}$ est aléatoirement noté i ou j tout au long de ce problème. Quelle attention dans la relecture du sujet !

soit

$$f(X) = 2i\underline{U}_1 \sin \Omega(X - 1).$$

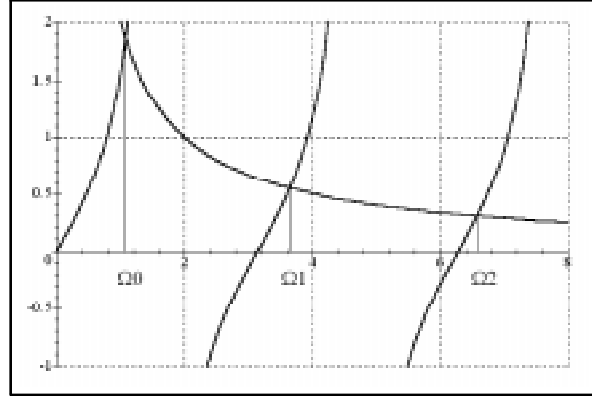
Alors la deuxième condition conduit à

$$2i\underline{U}_1 \cos \Omega - 2i\beta\Omega^2\underline{U}_1 \sin \Omega = 0$$

soit

$$\tan \Omega = \frac{1}{\beta\Omega}.$$

On peut se limiter au domaine $\Omega > 0$ (un changement de signe de Ω correspond à un changement de signe de \underline{U}_1), de sorte que les *modes stationnaires* se trouvent à l'intersection des courbes représentant $\tan \Omega$ et de la branche d'hyperbole $1/\beta\Omega$.



Dans la représentation donnée ici, on a pris $\beta = \frac{1}{2}$.

Les modes stationnaires parcourent donc un ensemble discret de valeur $\Omega_p, p \in \{0, 1, \dots\}$.

II.3.27. – La tension est continue au bornes de C_1 donc, au voisinage de $\theta = 0$, $U(0, \theta) \ll 1$ (la tension est initialement nulle). Le facteur α étant lui-même petit, on peut ignorer le terme en $U(0, \theta)^2$ dans (6), puisqu'il correspond à un ordre plus élevé de petitesse. Ainsi, on retombe sur un système linéaire et la notation complexe est applicable.

L'amplitude de la perturbation doit être prise petite devant u_0 et de durée faible devant le temps de charge du condensateur C_1 , pour que la tension reste presque nulle en $\theta = 0^+$.

L'équation (7) fournit, avec les hypothèses de l'énoncé,

$$f''(X) = (i\alpha\Omega - \Omega^2)f(X).$$

Au premier ordre en α ceci s'écrit $f''(X) = -K^2 f(X)$, où $K^2 = \Omega_p^2 + \alpha\Omega_p(2\Lambda - i)$, soit

$$K = \Omega_p + \alpha \left(\Lambda - \frac{i}{2} \right).$$

Puisque $f(1) = 0$, on obtient l'expression

$$f(X) = A \sin K(X - 1), \quad K, A \in \mathbb{C}.$$

Alors (6) donne, au premier ordre en α

$$K \cos K - \beta(\Omega_p^2 + 2\Omega_p\Lambda\alpha) \sin K = -\alpha(\beta - S)i\Omega_p \sin \Omega_p$$

(dans le second membre on a pris la forme stationnaire de U). Or, à cet ordre, on a

$$\begin{aligned} K \cos K &= \left(\Omega_p + \alpha \left(\Lambda - \frac{i}{2} \right) \right) \left(\cos \Omega_p - \alpha \left(\Lambda - \frac{i}{2} \right) \sin \Omega_p \right) \\ &= \Omega_p \cos \Omega_p + \alpha \left(\Lambda - \frac{i}{2} \right) (\cos \Omega_p - \Omega_p \sin \Omega_p) \\ &= \Omega_p \sin \Omega_p \left(\beta\Omega_p + \alpha \left(\Lambda - \frac{i}{2} \right) (\beta - 1) \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta\Omega_p(\Omega_p + 2\Lambda\alpha) \sin K &= \beta\Omega_p(\Omega_p + 2\Lambda\alpha) \left(\sin \Omega_p + \alpha \left(\Lambda - \frac{i}{2} \right) \cos \Omega_p \right) \\ &= \Omega_p \sin \Omega_p \left(\beta\Omega_p + 2\Lambda\alpha\beta + \alpha \left(\Lambda - \frac{i}{2} \right) \beta^2\Omega_p^2 \right), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\left(\Lambda - \frac{i}{2}\right)(\beta - 1) - 2\Lambda\beta - \left(\Lambda - \frac{i}{2}\right)\beta^2\Omega_p^2 = -i(\beta - S),$$

et

$$\Lambda = \frac{i}{2} \left(1 - \frac{S}{G(\Omega_p)}\right),$$

où $G(\Omega_p) = \frac{1 + \beta + (\beta\Omega_p^2)}{2}$.

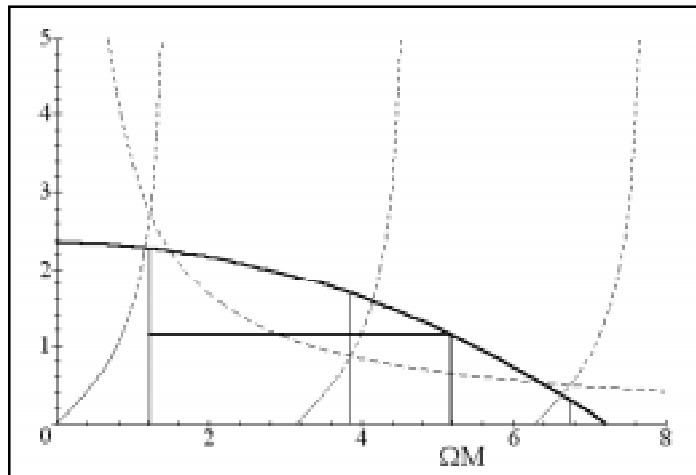
II.3.28. – Un mode sera auto-excité si la perturbation introduite voit son amplitude croître au cours du temps. Il faut pour cela que la partie réelle de $i\Omega$ soit positive, condition équivalente à $i\Lambda > 0$, soit

$$G(\Omega_p) < S.$$

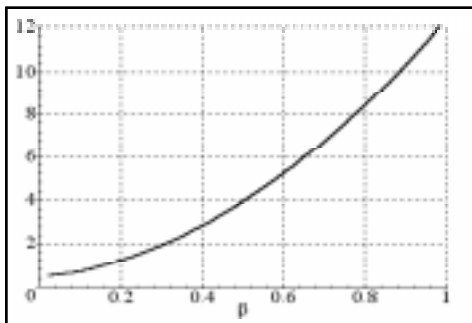
Cette excitation est rendue possible par le fait que, pour les tensions faibles, la résistance dynamique de la diode tunnel est négative ; l'effet Joule y crée de l'énergie.

II.3.29. – On superpose au schéma précédent la courbe $S - G(\Omega)$. La droite $\frac{1}{2}(S - G(\Omega_0))$ coupe cette courbe en Ω_M . Les modes stables sont les $\Omega_p < \Omega_M$.

Sur la figure suivante, on a pris $\beta = 0,3$ et $S = 3$; le câble accepte alors deux modes.



Il est ainsi possible de choisir les paramètres de façon à avoir un câble monomode. On recherche pour cela (β étant fixé) la valeur S_m de S réalisant $S = 2G(\Omega_1) - G(\Omega_0)$; pour $S > S_m$ on a au moins deux modes et pour $S < S_m$ le câble est monomode.



La figure représentant $S_m(\beta)$ est figurée ci-contre. On y lit, par exemple, que pour $\beta = 0,3$ la valeur maximale de S compatible avec un fonctionnement monomode est $S = 1,92$.