Mines-Ponts 2003 MP - La surface de la Lune

Corrigé proposé par E. Tarazona*

Première partie

Températures de surface

Température terrestre

Un modèle bien fruste

☐ **1 -** D'après la loi de Stefan, $P_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$. Or, la Terre ne reçoit que la puissance émise dans l'angle solide sous lequel on la voit depuis le Soleil, soit :

$$P_0 = P_S \frac{1}{4\pi} \frac{\pi R_T^2}{D_{ST}^2} = \frac{\pi R_T^2}{D_{ST}^2} R_S^2 \sigma T_S^4$$

De plus, la Terre étant à l'équilibre thermodynamique, on a $P_0 = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$, d'où l'on déduit :

$$\boxed{T_T = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2D_{ST}}}}$$

☐ **2 -** On a maintenant :

$$(1 - A_T)P_0 = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$$

En remplaçant P_0 par son expression, on en déduit :

$$\boxed{T_T^4 = (1 - A_T) T_S^4 \left(\frac{R_S}{2D_{ST}}\right)^2}$$

☐ **3 -** A.N. $T_T = 252$ K

Influence de l'atmosphère terrestre

☐ **4 -** Le Soleil et la Terre émettent dans des domaines spectraux différents (autour de 0,5 µm pour le Soleil et de 10 µm pour la Terre).

☐ **5 -** L'ensemble Terre - atmosphère absorbe $(1 - A_T)P_0$, dont $\alpha(1 - A_T)P_0$ est absorbé par l'atmosphère. La surface terrestre absorbe donc

$$P_1 = (1 - \alpha)(1 - A_T)P_0 = 4(1 - \alpha)\pi R_T^2 \sigma T_T^4$$

La moitié de l'énergie rayonnée par l'atmosphère l'est en direction de la Terre où elle est totalement absorbée. On a donc

$$P_2 = \frac{1}{2} P_a = 4\pi R_T^2 \sigma T_a^4$$

Un bilan thermique pour l'atmosphère donne

$$P_a = \alpha(1 - A_T)P_0 + P_T$$

où P_T est le rayonnement émis par la Terre. En remplaçant P_a, P_0 et P_T par leurs expressions en fonction des températures, on obtient :

$$T_a^4 = \frac{1}{2}\left(\alpha T_T^4 + T_T'^4\right)$$

Enfin, un bilan thermique sur la Terre donne $P_1 + P_2 = P_T$, soit :

$$4(1 - \alpha)\pi R_T^2 \sigma T_T^4 + 4\pi R_T^2 \sigma T_a^4 = 4\pi R_T^2 \sigma T_T'^4$$

En utilisant l'expression de T_a obtenue précédemment, on obtient :

$$\boxed{T_T'^4 = (2 - \alpha) T_T^4}$$

☐ **6 -** A.N. $T_T' = 285$ K

☐ **7 -** En utilisant les expressions de T_a et T_T' obtenues à la question 5, on a

$$T_a^4 = \frac{1}{2}\left(\alpha T_T^4 + (2 - \alpha) T_T^4\right)$$

soit :

$$\boxed{T_a = T_T}$$

*Toute remarque est bienvenue à eric.tarazona@free.fr

Température lunaire

Température de la surface ensoleillée

☐ **8 -** On procède de la même façon qu'à la question 2, en assimilant la distance Soleil-Lune à la distance Soleil-Terre. On obtient ainsi :

$$\boxed{T^4_{L,Soleil} = (1 - A_L)T^4_S \left(\frac{R_S}{2D_{ST}}\right)^2}$$

A.N. $T_{L,Soleil} = 275$ K

☐ **9 -** La zone de températures les plus élevées est la zone de la Lune pour laquelle les rayons solaires arrivent perpendiculairement à la surface.

☐ **10 -** En écrivant que le flux émis par une surface élémentaire d^2S de la zone définie précédemment est égal au flux reçu du Soleil, on obtient :

$$d^2S\sigma T^4_{L,max} = (1 - A_L)\frac{1}{4\pi}\frac{d^2S}{D^2_{ST}}4\pi R^2_S\sigma T^4_S$$

soit :

$$\boxed{T^4_{L,max} = (1 - A_L)T^4_S \left(\frac{R_S}{D_{ST}}\right)^2 = 4T^4_{L,Soleil}}$$

A.N. $T_{L,max} = 389$ K soit 116°C.

Le "clair de Terre"

☐ **11 -** Puisque l'on s'intéresse à la température maximale (question suivante), on calculera uniquement les puissances surfaciques dans des zones où les rayonnements "solaire" et "atmosphérique" arrivent en incidence quasi-normale sur la surface de la Lune.

Atmosphère terrestre :

$$\boxed{P_{A,surf} = \frac{1}{D^2_{LT}}R^2_T\sigma T^4_a(1 - A_L)}$$

Solaire réfléchi : La Terre réfléchit

$$A_T P_0 = \frac{\pi A_T R^2_T}{D^2_{ST}}R^2_S\sigma T^4_S$$

On suppose que ce rayonnement est renvoyé de façon isotrope dans un demi-espace. La fraction arrivant sur une surface élémentaire d^2S de la Lune est donc proportionnelle à l'angle solide sous lequel on voit cette surface depuis la Terre divisé par 2π, soit :

$$d^2P = (1 - A_L)A_T P_0 \frac{d^2S}{D^2_{LT}}\frac{1}{2\pi}$$

On a finalement :

$$\boxed{P_{S,surf} = (1 - A_L)A_T \frac{R^2_T R^2_S}{2D^2_{ST}D^2_{LT}}\sigma T^4_S}$$

A.N. Les deux contributions sont comparables :

$$P_{A,surf} = 9,6\,10^{-2}\mathrm{W/m^2}$$
$$P_{S,surf} = 6,3\,10^{-2}\mathrm{W/m^2}$$

☐ **12 -** Un bilan thermique pour une surface élémentaire donne :

$$\boxed{T'^4_{L,Terre} = \frac{P_{A,surf} + P_{S,surf}}{\sigma}}$$

A.N. $T'_{L,Terre} = 41$ K, ce qui est très éloigné des valeurs mesurées, de l'ordre de 120 K.

☐ **13 -** La modification serait négligeable. En effet, la puissance surfacique du rayonnement solaire direct vaut

$$P_{surf} = (1 - A_L)\frac{R^2_S}{D^2_{ST}}\sigma T^4_S = 1,3\,\mathrm{kW/m^2}$$

☐ **14 -** Les longueurs d'onde du visible se situent entre 0,38 µm et 0,78 µm ; celles de l'infrarouge au-delà jusqu'à quelques centaines de micromètres.

☐ **15 -** On prend comme température de la Lune la température moyenne calculée à la question 8 : $T_{L,Soleil} = 275$ K. D'après la loi de Wien, le rayonnement est maximum aux alentours de 10 µm , ce qui correspond à l'infrarouge.
Le clair de Lune est dû au rayonnement solaire réfléchi par la Lune.

Influence de la radioactivité

☐ **16 -** La chaleur dûe à la radioactivité est évacuée par rayonnement, ce qui se traduit par :

$$\frac{4}{3}\pi R^3_L p_L = 4\pi R^2_L\sigma T^4_{L,Roches}$$

d'où

$$\boxed{T^4_{L,Roches} = \frac{R_L p_L}{3\sigma}}$$

A.N. $T_{L,Roches} = 18$ K

☐ **17 -** Non, car $T_{L,Roches} \ll T_{L,max}$.

Deuxième partie

Le sol lunaire

Modélisation

La structure proposée est de la forme hexagonal compact, pour laquelle $c = 4\sqrt{\frac{2}{3}}R_{Sil}$, contrairement à ce qui est écrit dans l'énoncé.

☐ **18 -** La Lune ne possède pas d'atmosphère, donc il n'y a pas d'échange par convection. D'autre part, les contacts étant supposés ponctuels, les surfaces en contact sont nulles (ou tout au moins très faibles) ce qui empêche les échanges par conduction. Les échanges thermiques entre sphères sont donc limités au rayonnement.

☐ **19 -** Cette modélisation est couramment utilisée en cristallographie (loi de Bragg...). Les sphères étant jointives, le rayonnement émis par une couche de l'empilement est presque totalement absorbé par les couches adjacentes, ce qui justifie l'opacité des plans du modèle.

☐ **20 -** Soient T et T+ΔT les températures de deux plans adjacents. La densité de flux thermique entre les deux plans est $J_Q = \sigma T^4 - \sigma(T+\Delta T)^4$. Or $\Delta T \ll T$, donc un développement limité donne :

$$J_Q = -4\sigma T^3 \Delta T$$

Pour un transfert de chaleur par conduction, on aurait :

$$J_Q = -\lambda\frac{dT}{dx} \simeq -\lambda\frac{2\Delta T}{c}$$

En identifiant les deux expressions de J_Q et en remplaçant c par son expression en fonction de R_{Sil}, on obtient la conductivité thermique équivalente :

$$\boxed{\lambda = 8\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma R_{Sil} T^3}$$

☐ **21 -** A.N. λ = 3,7 10^{-11}T^3 W.K^{-1}.m^{-1} (T en K).
Pour T=275 K (question 8), on a λ = 7,7 10^{-4} W.K^{-1}.m^{-1}, ce qui est très inférieur à la conductivité des silicates massifs.

☐ **22 -** Les sphères de silicates occupent 74% du volume total donc $d = 0,74 d_{Sil}$.
La capacité calorifique massique n'est pas affectée par la dipersion du matériau : $c = c_{Sil}$.

☐ **23 -** Il est possible que le tassement modifie l'arrangement des grains de silicates situés en profondeur.

Influence de l'impact des météorites

☐ **24 -** Si l'on néglige la vitesse des météorites dans le référentiel de Copernic, la vitesse d'impact est égale à la vitesse de la Lune dans ce même référentiel. On a

$$v_{Lune/Terre} = \frac{2\pi D_{LT}}{27.24.3600} = 10^3 m/s$$

et

$$v_{Terre} = \frac{2\pi D_{ST}}{365.24.3600} = 3\,10^4 m/s \gg v_{Lune/Terre}$$

La vitesse d'impact des météorites est donc bien de l'ordre de v = 3 10^4m/s.

☐ **25 -** On considère que la totalité de l'énergie cinétique de la météorite est convertie en chaleur. Cette chaleur sert à élever la température et à faire fondre une certaine masse m$_2$ de sol lunaire. Cette masse est déterminée par :

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 = m_2 c_{Sil}(T_f - T_{L,Soleil}) + m_2 L_f$$

soit

$$\boxed{\frac{m_2}{m_1} = \frac{\frac{1}{2}v^2}{c_{Sil}(T_f - T_{L,Soleil}) + L_f}}$$

A.N. $\frac{m_2}{m_1} = 1,3\,10^{-2}$

☐ **26 -** La poussière fondue se solidifie en silicate massif donc λ se rapproche de K_{Sil}.