

CORRECTION MINES MP 2003 : PHYSIQUE II

ELECTROSTATIQUE ET RAYONNEMENT

I Circuit de deux condensateurs, régime quasi stationnaire

1°) L'énergie stockée dans le circuit l'est uniquement sous forme électrostatique dans les condensateurs. On a donc $W = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}$.

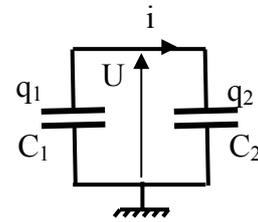
A l'instant initial seul le condensateur 1 est chargé donc : $W_i = \frac{q_{10}^2}{2C_1}$

2°) A l'équilibre, les tensions aux bornes des deux condensateurs sont identiques, on a donc : $U_f = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$

La conservation de la charge impose : $q_{10} = q_1 + q_2$

On a donc $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_{10} - q_1}{C_2} \Rightarrow q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_{10}$ et $q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q_{10}$

Soit $U_f = \frac{q_{10}}{C_1 + C_2}$



3°) D'après les deux questions qui précède, on a

$$W_f = \frac{\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} q_{10}\right)^2}{2C_1} + \frac{\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} q_{10}\right)^2}{2C_2} = \frac{C_1 q_{10}^2}{2(C_1 + C_2)^2} + \frac{C_2 q_{10}^2}{2(C_1 + C_2)^2}$$

Soit $W_f = \frac{q_{10}^2}{2(C_1 + C_2)}$

$$W_f - W_i = \frac{q_{10}^2}{2(C_1 + C_2)} - \frac{q_{10}^2}{2C_1} = \frac{q_{10}^2}{2} \left(\frac{1}{C_1 + C_2} - \frac{1}{C_1} \right) \text{ soit } \span style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> $W_f - W_i = -\frac{q_{10}^2}{2C_1} \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$$

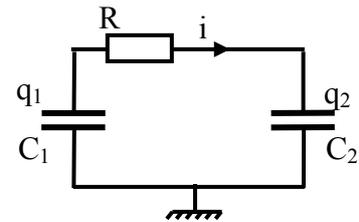
4°) L'état d'équilibre correspond à $i=0$ puisqu'il n'y a pas de générateur, de plus la conservation de la charge est toujours valable donc les calculs des questions 2°) et 3°) restent valables. On trouve donc le même état final.

5°) On applique la loi des mailles au circuit ci-contre :

$$\frac{q_1}{C_1} = Ri + \frac{q_2}{C_2}$$

On a toujours $q_2 = q_{10} - q_1$, et les conventions d'orientation imposent $i = -\frac{dq_1}{dt}$ d'où l'équation différentielle sur q_1

suivante : $\frac{q_1}{C_1} = -R \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_{10} - q_1}{C_2} \Rightarrow \frac{dq_1}{dt} + \frac{C_1 + C_2}{RC_1 C_2} q_1 = \frac{q_{10}}{RC_2}$



Cette équation différentielle s'intègre en : $q_1(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_{10}$ où A est une constante d'intégration et $\tau = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}$. On détermine A avec la condition initiale $q_1(0) = q_{10}$:

$$q_{10} = A + \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_{10} \Rightarrow A = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q_{10} \quad \text{d'où } q_1(t) = \frac{C_2 q_{10}}{C_1 + C_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_{10}$$

Pour déterminer $i(t)$ il suffit d'utiliser $i = -\frac{dq_1}{dt}$ d'où :
$$i(t) = \frac{q_{10}}{RC_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

L'énergie dissipée dans la résistance est l'énergie dissipée par effet Joules, on a donc :

$$Q = \int_0^{+\infty} Ri^2(t)dt = \int_0^{+\infty} R \left(\frac{q_{10}}{RC_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)^2 dt = \frac{q_{10}^2}{RC_1^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{q_{10}^2}{RC_1^2} \left[-\frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right]_0^{+\infty}$$

On trouve donc :
$$Q = \frac{q_{10}^2 \tau}{RC_1^2} = \frac{C_2 q_{10}^2}{2C_1(C_1 + C_2)}$$

L'énergie dissipée par effet Joule ne dépend pas de la résistance du circuit.

6°) D'après l'étude de la question précédente la constante de temps du circuit est

$$\tau = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}$$
 Au bout de quelques τ , on peut considérer que l'on a atteint l'état d'équilibre du

système, les condensateurs on quasiment atteint leurs charges et tensions finales.

En prenant une valeur usuelle pour les capacités utilisées au laboratoire ($C_1 \approx C_2 \approx 1 \mu F$) et en supposant les fils de liaisons bons conducteurs $R \approx 10^{-3} \Omega$ on trouve $\tau \approx 5 \cdot 10^{-10} s$.

On a donc $L = \tau c \approx 15 \cdot 10^{-2} m = 15 cm$.

On sait que, pour être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaire (et pouvoir appliquer les lois de Kirchhoff), il faut que la dimension du circuit électrocinétique soit petite devant la distance caractéristique associée au temps caractéristique de l'évolution des grandeurs électriques (période pour les variations périodiques...). Dans le cas qui nous concerne, les circuits usuels étant de la taille du mètre, leurs dimensions ne sont pas négligeables devant L, on est donc hors du cadre de l'ARQS, ce qui remet en cause les calculs effectués dans cette partie.

Remarque : Plus les valeurs des capacités C augmentent, plus on se rapproche de l'ARQS. Si $C_1 \approx C_2 \approx 100 \mu F$, $L \approx 15 m$, ce qui commence à être grand devant les dimensions des circuits usuels en laboratoire.

On va donc envisager une autre explication pour la perte d'énergie dans la suite du problème.

II Rayonnement d'une boucle de courant

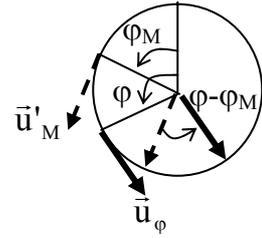
7°) Le courant parcourant la spire a un temps caractéristique de variation égale à τ , cela veut dire que les ondes électromagnétiques qui crée $i(t)$ ont des fréquences de l'ordre de $f = 1/\tau$. On en déduit que la longueur d'onde associée à l'onde de courant est égale à $\lambda = c\tau$.

On a donc $a \ll \lambda$ donc $i(t)$ est uniforme sur la spire.

8°) Le potentiel vecteur est un vecteur polaire, c'est un vecteur symétrique. Tout plan contenant l'axe (Oz) et passant par P (c'est à dire le plan $(\vec{u}_z, \vec{u}_\theta)$), est un plan d'antisymétrie, donc $\vec{A}(P, t)$ est normal à ce plan. On en déduit que
$$\vec{A}(P, t) = A(P, t) \vec{u}_\phi$$

Pour déterminer $\vec{A}(P, t)$, on projette l'expression de $d\vec{A}(P, t)$ et on intègre sur la spire.

Il faut donc calculer $d\vec{s} \cdot \vec{u}_\varphi = a d\varphi \vec{u}'_M \cdot \vec{u}_\varphi$, or l'angle entre \vec{u}'_M et \vec{u}_φ est égal à (cf figure ci-contre) : $\varphi - \varphi_M$, d'où $\vec{u}'_M \cdot \vec{u}_\varphi = \cos(\varphi - \varphi_M)$



On en déduit
$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i(t - t_{MP})}{MP} a \cos(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M$$

Rem : On a $i(P, t - t_{MP}) = i(t - t_{MP})$ car on a vu à la question 7°) que i est indépendant du point du circuit considéré.

9°) $\vec{MP} = \vec{MO} + \vec{OP}$ donc

$$MP^2 = a^2 + r^2 + 2\vec{MO} \cdot \vec{OP} = a^2 + r^2 - 2\vec{OM} \cdot (r \cos(\theta)\vec{u}_z + r \sin(\theta)\vec{v})$$

Or \vec{OM} est normal à \vec{u}_z et fait un angle $\varphi - \varphi_M$ avec \vec{v} , on obtient donc :

$$MP^2 = a^2 + r^2 - 2ar \sin(\theta) \cos(\varphi - \varphi_M) = r^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2 \frac{a}{r} \sin(\theta) \cos(\varphi - \varphi_M) \right)$$

En prenant la racine et en faisant un développement limité au premier ordre, on obtient :

$$MP = r \left(1 - \frac{a}{r} \sin(\theta) \cos(\varphi - \varphi_M) \right)$$

On a $t - t_{MP} = t - \frac{MP}{c}$ et en utilisant le développement au premier ordre établi ci-dessus, en posant $u = t - \frac{r}{c}$ on obtient $t - t_{MP} = u + \frac{a}{c} \sin(\theta) \cos(\varphi - \varphi_M)$.

De plus, puisque $\frac{a}{c}$ est un infiniment petit devant $\frac{r}{c}$, le terme en $\frac{a}{c}$ dans l'expression de $t - t_{MP}$ est un infiniment petit devant u , on peut donc faire un développement au premier ordre de i autour de u :

$$i(t - t_{MP}) = i(u) + \frac{a}{c} \sin(\theta) \cos(\varphi - \varphi_M) \frac{di}{dt}(u)$$

On calcule donc A_φ :

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{i(u)}{MP} a \cos(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M + \int_0^{2\pi} \frac{di(u)}{dt} \frac{a^2}{MPc} \sin(\theta) \cos^2(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M \right)$$

En utilisant le développement de MP on peut calculer chacune des deux intégrales :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{i(u)}{MP} a \cos(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M &= \int_0^{2\pi} \frac{i(u)}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin(\theta) \cos(\varphi - \varphi_M) \right) a \cos(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{i(u)}{r} a \cos(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M + \int_0^{2\pi} \frac{a^2 i(u)}{r^2} \sin(\theta) \cos^2(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M \\ &= 0 + \pi \frac{a^2 i(u)}{r^2} \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{di(u)}{dt} \frac{a^2}{MPc} \sin(\theta) \cos^2(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M = \int_0^{2\pi} \frac{di(u)}{dt} \frac{a^2}{rc} \left(1 - \frac{a}{r} \sin(\theta) \cos(\varphi - \varphi_M)\right) \sin(\theta) \cos^2(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{di(u)}{dt} \frac{a^2}{rc} \sin(\theta) \cos^2(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M + \int_0^{2\pi} \frac{di(u)}{dt} \frac{a^3}{r^2c} \sin(\theta) \cos^3(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M$$

$$= \pi \frac{di(u)}{dt} \frac{a^2}{rc} \sin(\theta) + 0$$

On obtient donc : $A_\varphi = \frac{\mu_0}{4} \left(\frac{a^2 i(u)}{r^2} \sin(\theta) + \frac{di(u)}{dt} \frac{a^2}{rc} \sin(\theta) \right)$

Or on peut essayer d'apprécier l'ordre de grandeur des deux termes de cette équation en tenant compte du fait que τ est le temps caractéristique pour que le courant i varie de i_0 , on a

donc : $\frac{di}{dt} \approx \frac{i_0}{\tau}$, d'où le rapport des deux termes : $\frac{\frac{a^2 i(u)}{r^2} \sin(\theta)}{\frac{di(u)}{dt} \frac{a^2}{rc} \sin(\theta)} = \frac{\frac{a^2 i_0}{r^2} \sin(\theta)}{\frac{i_0}{\tau} \frac{a^2}{rc} \sin(\theta)} = \frac{\tau c}{r} \ll 1$

En conclusion le premier terme est négligeable devant le second et on trouve :

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 a^2}{4rc} \frac{di(u)}{dt} \sin(\theta)$$

10°) On a $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$ en utilisant l'expression du rotationnel en sphérique fourni par l'énoncé :

$$\vec{B} = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_0 a^2}{4c} \frac{di(u)}{dt} \sin^2(\theta) \right) \right] \frac{\vec{u}_r}{r^2 \sin(\theta)} - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0 a^2}{4c} \frac{di(t-r/c)}{dt} \sin^2(\theta) \right) \right] \frac{\vec{u}_\theta}{r \sin(\theta)}$$

$$= \frac{\mu_0 a^2}{2r^2 c} \frac{di(u)}{dt} \cos(\theta) \vec{u}_r + \frac{\mu_0 a^2}{4rc^2} \frac{d^2 i(u)}{dt^2} \sin(\theta) \vec{u}_\theta$$

Comme à la question précédente, on compare les ordres de grandeur des deux termes en assimilant les dérivées aux rapports des grandeurs caractéristiques :

$$\frac{\frac{\mu_0 a^2}{2r^2 c} \frac{di(u)}{dt} \cos(\theta)}{\frac{\mu_0 a^2}{4rc^2} \frac{d^2 i(u)}{dt^2} \sin(\theta)} = \frac{\frac{\mu_0 a^2}{2r^2 c} \frac{i_0}{\tau} \tan(\theta)}{\frac{\mu_0 a^2}{4rc^2} \frac{i_0}{\tau^2}} = \frac{2c\tau}{r} \tan(\theta)$$

On voit que si on ne tient pas compte de la dépendance en θ , le premier terme est négligeable. (Néanmoins pour $\theta \approx 0$, le second terme s'annule, alors que le premier a une valeur finie).

En conclusion on peut dire que la composante radiale du champ magnétique a une moyenne négligeable devant la composante orthoradiale, mais que localement (en particulier dans la direction des pôles) ce n'est pas toujours le cas.

On prendra : $\vec{B} = \frac{\mu_0 a^2}{4rc^2} \frac{d^2 i(u)}{dt^2} \sin(\theta) \vec{u}_\theta$

11°) On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Comme l'onde se propage dans le vide, qu'elle a été

créée par une variation de courant, il n'y a de charge nulle part ($\rho=0$) et donc $\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \vec{0}$.

On en déduit :
$$\vec{E} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial t} \vec{u}_\phi = -\frac{\mu_0 a^2}{4rc} \frac{d^2 i(u)}{dt^2} \sin(\theta) \vec{u}_\phi$$

On remarque que \vec{E} et \vec{B} sont liés. On peut écrire :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

L'onde rayonnée a donc localement une structure d'onde plane : la direction de propagation locale est \vec{u}_r ; les champs \vec{E} et \vec{B} sont transverses, le rapport de \vec{E} sur \vec{B} vaut $1/c$.

12°) On calcule le vecteur de Poynting dans l'approximation précédente :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{c} \left(\frac{a^2}{4rc} \frac{d^2 i(u)}{dt^2} \sin(\theta) \right)^2 \vec{u}_r \text{ donc } \vec{R} = \frac{\mu_0 a^4 \sin^2(\theta)}{16r^2 c^3} \left(\frac{d^2 i(u)}{dt^2} \right)^2 \vec{u}_r$$

La puissance rayonnée à travers une sphère de rayon r est égale au flux du vecteur de Poynting à travers cette sphère :

$$P_{\text{ray}} = \oiint_{\text{sphère}} \frac{\mu_0 a^4 \sin^2(\theta)}{16r^2 c^3} \left(\frac{d^2 i(u)}{dt^2} \right)^2 \vec{u}_r \cdot (2\pi r^2 \sin(\theta) d\theta \vec{u}_r) = \frac{\mu_0 \pi a^4}{8c^3} \left(\frac{d^2 i(u)}{dt^2} \right)^2 \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta$$

d'où
$$P_{\text{ray}} = \frac{\mu_0 \pi a^4}{6c^3} \left(\frac{d^2 i(u)}{dt^2} \right)^2 \text{ et donc } K = \frac{\mu_0 \pi a^4}{6c^3} = \frac{\mu_0 \sigma^2}{6\pi c^3} \text{ A.N. : } K = 2,47 \cdot 10^{-33} \sigma^2$$

13°) Si on suppose que le courant qui parcourt la spire est sinusoïdale de pulsation ω_0 ,

et d'amplitude i_0 , on obtient :
$$\left(\frac{d^2 i \left(t - \frac{r}{c} \right)}{dt^2} \right)^2 = \omega_0^4 i_0^2 \cos^2 \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

et donc
$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} P_{\text{ray}} dt = \frac{\mu_0 \pi a^4}{6c^3} i_0^2 \omega_0^4 \int_0^{2\pi} \cos^2 \left(t - \frac{r}{c} \right) dt$$

d'où
$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 \pi a^4 i_0^2}{12c^3} \omega_0^4 = \frac{\mu_0}{12\pi c^3} (i_0 \sigma)^2 \omega_0^4$$

Tout d'abord, on constate que comme pour le dipôle oscillant électrique, la puissance moyenne totale émise est proportionnelle à ω_0^4 , d'où les mêmes résultats de diffusion préférentielle dans le bleu...

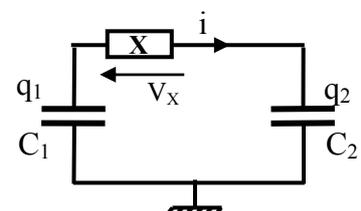
De plus, on constate que $i_0 \sigma = m_0$ est l'amplitude du dipôle magnétique correspondant à la spire. Le passage de l'électrostatique à la magnétostatique se fait en remplaçant $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $\frac{\mu_0}{4\pi}$,

ce qui revient à diviser par c^2 . Ainsi, les formules de puissance moyenne rayonnée dans le temps sont strictement identiques pour les deux types de dipôle, à condition de remplacer p_0 par m_0 et de diviser par c^2 la formule du dipôle magnétique.

III Rayonnement dans un circuit à deux condensateurs

14°) On écrit la loi des mailles dans le circuit ci-contre :

$$\frac{q_1}{C_1} = V_X + \frac{q_2}{C_2}$$



Les conventions d'orientation donnent $i(t) = \frac{dq_2}{dt} = -\frac{dq_1}{dt}$

En convention récepteur le dipôle X dissipe la puissance $P=iV_X$, et d'après l'énoncé on a

$$P=P_{\text{ray}} \text{ d'où : } V_X = \frac{K}{i} \left(\frac{d^2 i(u)}{dt^2} \right)^2$$

En dérivant la loi des Mailles on obtient : $-\frac{i}{C_1} = \frac{dV_X}{dt} + \frac{i}{C_2} \Leftrightarrow \frac{dV_X}{dt} = -\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i$, c'est

à dire $i = -C \frac{dV_X}{dt}$ avec $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ et en réinjectant cette relation dans celle obtenue

$$\text{précédemment on trouve : } -CV_X \frac{dV_X}{dt} = C^2 K \left(\frac{d^3 V_X}{dt^3} \right)^2 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{d^3 V_X}{dt^3} \right)^2 + \frac{1}{CK} V_X \frac{dV_X}{dt} = 0}$$

15°) On injecte dans l'équation de la question précédente $V_X = V_0 \exp(st)$:

$$V_0^2 s^6 \exp(2st) + \frac{1}{CK} V_0^2 s \exp(2st) = 0, \text{ cette équation est vrai quelque soit } t, \text{ on en déduit :}$$

$$V_0^2 s \left(s^5 + \frac{1}{CK} \right) = 0 \text{ D'où : } s=0 \text{ ou } s^5 = -\frac{1}{CK} \text{ et en prenant les racines cinquièmes d'un}$$

nombre négatif : on trouve les six solutions suivantes :

$$\boxed{\left\{ 0, \sqrt[5]{\frac{1}{CK}} e^{i\frac{\pi}{5}}, \sqrt[5]{\frac{1}{CK}} e^{i\frac{3\pi}{5}}, -\sqrt[5]{\frac{1}{CK}}, \sqrt[5]{\frac{1}{CK}} e^{i\frac{7\pi}{5}}, \sqrt[5]{\frac{1}{CK}} e^{i\frac{9\pi}{5}} \right\}}$$

L'équation différentielle n'étant pas linéaire, une combinaison linéaire de ces solutions, n'est pas une solution.

16°) La solution devant être réelle et comme la solution $s=0$ ne convient pas (il faut que de l'énergie se dissipe), il ne reste plus que : $s = -\sqrt[5]{\frac{1}{CK}}$.

$$17°) \text{ D'après la question 14°) on a } P_{\text{ray}} = K \left(\frac{d^2 i(u)}{dt^2} \right)^2 = i(u) V_X(u) \text{ ainsi que } i = -C \frac{dV_X}{dt}$$

On en déduit $P_{\text{ray}} = -\frac{1}{2} C \frac{d}{dt} [V_X^2(u)]$. Pour trouver l'énergie rayonnée par le circuit, il faut intégrer la puissance de $t=r/c$ à $t=+\infty$ (on intègre à partir de $t=r/c$ car la puissance rayonnée a été calculée à travers une sphère de rayon r , or il faut un temps égal à r/c pour que l'énergie arrive à cette distance du circuit) on trouve :

$$E_{\text{ray}} = \int_{r/c}^{+\infty} -\frac{1}{2} C \frac{d}{dt} \left[V_X^2 \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] dt = -\frac{1}{2} C \left[V_X^2 \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]_{r/c}^{+\infty} \text{ or on a } V_X = V_0 \exp \left(-\sqrt[5]{\frac{1}{CK}} t \right) \text{ d'où :}$$

$$E_{\text{ray}} = \frac{1}{2} C V_0^2, \text{ or à } t=0, \text{ si } q_1=q_{10} \text{ et } q_2=0, \text{ la loi des mailles donne } V_0=q_{10}/C_1, \text{ on en déduit :}$$

$$E_{\text{ray}} = \frac{1}{2} C \frac{q_{10}^2}{C_1^2} = \frac{q_{10}^2}{2C_1} \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

cette énergie correspond à l'énergie dissipée obtenue dans la première partie. Mais dans l'étude qui vient d'être faite, cette énergie est entièrement dissipée par rayonnement.

Dans la réalité, une partie de la dissipation est due à l'effet Joule, l'autre partie au rayonnement, c'est ce que l'on va montrer par la suite.

IV Un circuit plus réaliste

18°) La loi des mailles donne : $L \frac{di}{dt} + Ri + V_C + V_X = 0$ et la définition du dipôle X

impose toujours $V_X = \frac{K}{i} \left(\frac{d^2 i(u)}{dt^2} \right)^2$, enfin on a $i = \frac{dq}{dt} = C_s \frac{dV_C}{dt}$.

On remplace donc V_X et i par leurs expressions :

$$L \frac{di}{dt} i + Ri^2 + iV_C + K \left(\frac{d^2 i(u)}{dt^2} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow LC_s^2 \frac{dV_C}{dt} \frac{d^2 V_C}{dt^2} + RC_s^2 \left(\frac{dV_C}{dt} \right)^2 + C_s V_C \frac{dV_C}{dt} + KC_s^2 \left(\frac{d^3 V_C}{dt^3} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d^3 V_C}{dt^3} \right)^2 + \frac{L}{K} \frac{dV_C}{dt} \frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{R}{K} \left(\frac{dV_C}{dt} \right)^2 + \frac{1}{KC_s} V_C \frac{dV_C}{dt} = 0$$

Enfin on injecte $V_C = A_C \exp(-qt)$ et on simplifie par $qA_C^2 \exp(-2qt)$:

$$q^5 - \frac{L}{K} q^2 + \frac{R}{K} q - \frac{1}{KC_s} = 0$$

Si $K \rightarrow 0$, l'équation devient $q^2 - \frac{R}{L} q + \frac{1}{LC_s} = 0$. On a donc un trinôme du second degré dont

la somme (R/L) et le produit $1/LC_s$ des racines sont positifs, donc les racines sont positives (en fait si le discriminant est négatif, on a un régime pseudo-oscillant, typique du circuit RLC série ; ce qui compte c'est que quel que soit le cas le condensateur se décharge...)

En conclusion quant on fait tendre K vers zéro, on se retrouve avec un circuit RLC classique, dans lequel le rayonnement n'intervient pas.

19°) L'équation [3] peut s'écrire $Lq^2 - (R + Kq^4)q + \frac{1}{C_s} = 0$. On voit que Kq^4 est

homogène à une résistance. Or ce terme provient de la prise en compte de l'énergie dissipée par rayonnement, on peut donc l'assimiler à une résistance de rayonnement.

De manière plus quantitative on a :

$$P_{\text{ray}} = K \left(\frac{d^2 i}{dt^2} \right)^2 \text{ or, } i = \frac{dq}{dt} = C_s \frac{dV_C}{dt} \text{ et } V_C = A_C \exp(-qt) \text{ donc } i = -A_C C_s q \exp(-qt) \text{ et}$$

$$P_{\text{ray}} = Kq^4 A_C^2 C_s^2 \exp(-2qt) \Rightarrow \boxed{P_{\text{ray}} = Kq^4 i^2 = R_{\text{rad}} i^2} \text{ on retrouve le même résultat.}$$

20°) Les résultats fournis permettent d'étudier les pertes d'énergie lors de la décharge d'un circuit RC. Lors de la décharge pour atteindre l'équilibre, le circuit est parcouru par un courant $i(t)$. Quelles que soient les grandeurs expérimentales choisies, il y a deux types de

dissipation d'énergie dus à $i(t)$: $P_{\text{Joule}}=Ri^2$ et $P_{\text{rayonnement}}=R_{\text{rad}}i^2$. La puissance rayonnée a été étudiée dans la seconde partie où l'on a établi qu'elle était proportionnelle au carré de la dérivée seconde du courant :

$$P_{\text{ray}} = K \left(\frac{d^2 i}{dt^2} \right)^2 \text{ et donc l'ordre de grandeur de la puissance rayonnée est inversement}$$

proportionnel à la puissance quatrième du temps caractéristique de décharge $\tau=1/q$ ($P_{\text{ray}} \approx K \frac{i_0^2}{\tau^4}$). On peut donc dire que plus τ est grand, moins l'effet du rayonnement se fera sentir.

On peut maintenant répondre aux questions de l'énoncé :

On a un déclin ordinaire du circuit RC lorsque $R_{\text{rad}} \ll R$, donc pour R grand à C fixé. Dans ce cas là $1/q = \tau = RC$ (temps caractéristique du circuit ordinaire) est très grand. C'est le cas pour $R \geq 5 \cdot 10^{-5} \Omega$.

Inversement dès que R est inférieur à cette valeur, la décharge est suffisamment rapide pour que le rayonnement ne soit pas négligeable. On s'aperçoit aussi que le temps caractéristique de décharge $1/q$ n'est plus égal à RC , le dipôle X, change la forme de la décharge.

Lorsque R est très faible, l'énergie dissipée par effet Joule est négligeable. La décharge du circuit est uniquement due au dipôle X. Le temps caractéristique de décharge $1/q$, ne dépend plus de R , il reste donc constant.

Si $R=1\Omega$, on est dans le cas du déclin ordinaire du circuit RC donc $q=1/RC=10^4 \text{s}^{-1}$.

Diagramme de Bode :

- Lorsque $R \rightarrow 0$, $R \ll R_{\text{rad}}$, $q \approx Cte$ et $R_{\text{rad}} \approx Cte = R_0$ on a l'asymptote suivante :

$$\ln \left(\frac{R_{\text{rad}}}{R} \right) = \ln(R_0) - \ln(R)$$

L'équation [3] devient $q^5 - \frac{1}{KC_s} = 0 \Rightarrow q = \left(\frac{1}{KC_s} \right)^{\frac{1}{5}}$ on en déduit $R_0 = Kq^4 = \left(\frac{K}{C_s^4} \right)^{\frac{1}{5}}$

- Lorsque $R \rightarrow +\infty$, $R \gg R_{\text{rad}}$, $q \approx 1/RC$ et $R_{\text{rad}} \approx KR^{-4}C^{-4}$ on a l'asymptote suivante :

$$\ln \left(\frac{R_{\text{rad}}}{R} \right) = \ln \left(\frac{K}{C_s^4} \right) - 5 \ln(R)$$

L'équation [3] devient $\frac{R}{K}q - \frac{1}{KC_s} = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{RC_s}$

On détermine expérimentalement, avec les données du tableau la valeur de K : $K=4,8 \cdot 10^{-42} \text{ S.I}$

Remarque : Si on utilise la formule théorique de la question 12°) avec la valeur de a fournie par l'énoncé, on trouve $K=1,5 \cdot 10^{-37} \text{ S.I}$. Même si le circuit n'est pas circulaire comme dans la partie II, la différence semble très (trop !) importante...

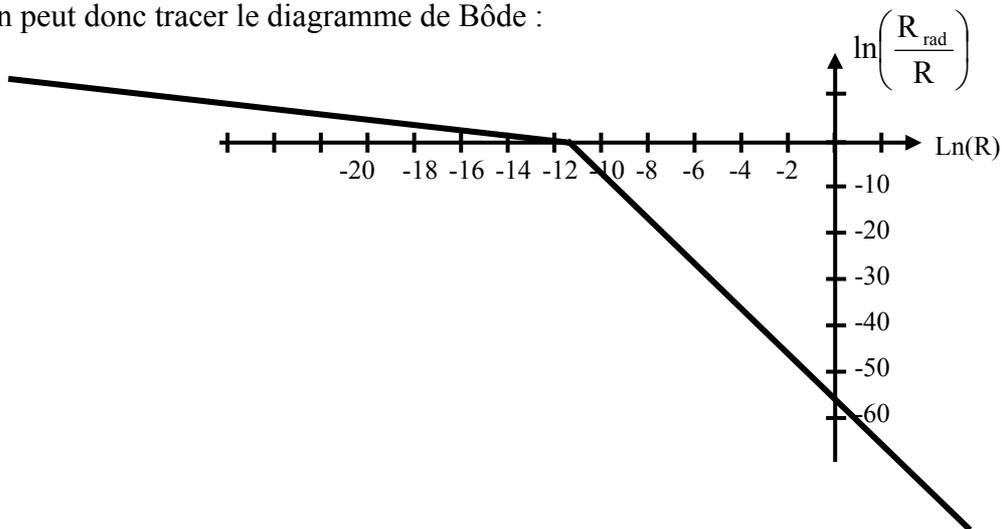
On déduit de la valeur de K les équations semi-numériques des asymptotes :

$$\ln \left(\frac{R_{\text{rad}}}{R} \right) = -11,6 - \ln(R) \quad \text{et} \quad \ln \left(\frac{R_{\text{rad}}}{R} \right) = -58,3 - 5 \ln(R)$$

On peut donc trouver l'intersection de ces deux droites :
$$\begin{cases} R = \left(\frac{K}{C_S^4}\right)^{\frac{1}{5}} = 8,6 \cdot 10^{-6} \Omega \\ \ln\left(\frac{R_{\text{rad}}}{R}\right) = 0 \end{cases}$$

Rem : Si on ne s'intéresse qu'à l'allure du diagramme, on peut déterminer qualitativement le point d'intersection des deux droites ; il correspond à la valeur de la résistance qui sépare les deux régimes : On voit sur le tableau de données que le régime radiatif se trouve pour des valeurs de R inférieures à $5 \cdot 10^{-6} \Omega$, alors que le régime classique de décharge d'un circuit RC se situe dans la zone des valeurs de R supérieures à $5 \cdot 10^{-5} \Omega$. L'ordre de grandeur de la résistance qui sépare les deux régimes est donc $R_I \approx 10^{-5} \Omega$.

On peut donc tracer le diagramme de Bode :



V Discussion des effets radiatifs

21°) Si le temps de décharge est suffisamment long pour que le rayonnement soit négligeable alors la loi des mailles donne :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{dont les solutions dépendent du signe du discriminant de l'équation}$$

caractéristique : $\Delta = \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} = 310^{22} \text{ s}^{-2} > 0$, les deux racines sont donc

$$r = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}} = -\frac{R}{2L} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}} \right)$$

or $\frac{4L}{R^2C} \approx 10^{-3} \ll 1$ donc $r \approx -\frac{R}{2L} \left(1 \mp \left(1 - \frac{2L}{R^2C} \right) \right)$ d'où les deux racines :

$$r_1 \approx -\frac{R}{L} \left(1 - \frac{L}{R^2C} \right) \approx -\frac{R}{L} \quad \text{et} \quad r_2 \approx -\frac{R}{2L} \left(\frac{2L}{R^2C} \right) = -\frac{1}{RC}$$

Donc avec des conditions initiales appropriées, on peut avoir $q = q_0 \exp(-t/RC)$.

22°) $\tau_{RC} = RC$ est le temps caractéristique de décharge dans un circuit RC lorsque les phénomènes de rayonnement sont négligeables.

Si $\alpha \ll 1$, alors $\tau_{RC} \ll \tau_l$: le temps de décharge sans rayonnement est inférieur au temps nécessaire à l'information (variation de la charge) pour se déplacer dans le circuit. Ainsi, le condensateur est censé se décharger en un temps très petit devant le temps nécessaire à ce que l'information parcoure le circuit. C'est évidemment impossible. La décharge ne peut donc pas être ordinaire, il y a radiation et on peut même affirmer que le temps caractéristique de décharge ne peut pas être inférieur à τ_l et sera donc supérieur à τ_{RC} .

Si $\alpha \gg 1$, alors $\tau_{RC} \gg \tau_l$: le temps de décharge sans rayonnement est supérieur au temps nécessaire à l'information (variation de la charge) pour se déplacer dans le circuit ; donc la décharge est ordinaire, la radiation est négligeable.

Application numérique : $\tau_{RC} = 2,4 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ et $\tau_l = 1,7 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ on a donc $\tau_{RC} \gg \tau_l$ donc le rayonnement est négligeable.

23°) On a la capacité du parallélépipède égale à $C_M = \epsilon_0 S / e$ et sa résistance à $R_M = \rho e / S$ donc $\tau_M = R_M C_M = \epsilon_0 \rho$. Cette constante de temps est le temps caractéristique de la recombinaison des charges à l'intérieur du conducteur : il contrôle donc la neutralité en volume du conducteur. Pour pouvoir faire les raisonnements de la question précédente il faut supposer que $\tau_M \ll \tau_{RC}, \tau_l$. On $\tau_M = 7 \cdot 10^{-11} \text{ s}$, donc la condition est vérifiée et on peut supposer que le conducteur est localement neutre.