PHYSIQUE I ---2008

QUELQUES OSCILLATIONS

Corrigé de M ELABDALLAOUI
Professeur agrégé CPGE Marrakech

I. —Rail fixe

1— la vitesse du point I est nulle :

$\vec{v}(I)=\vec{v}(C)+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{CI}=(R-r)\dot{\alpha}\,\hat{\alpha}+\dot{\theta}\,\hat{k}\wedge r\,\hat{r}=\left((R-r)\dot{\alpha}+r\,\dot{\theta}\right)\hat{\alpha}$ ce qui donne

$\boxed{(R-r)\dot{\alpha}+r\,\dot{\theta}=0}$

Si $r \ll R$ alors $|\dot{\theta}|\gg|\dot{\alpha}|$ la bille roule trop vite

$\dot{\alpha}$ et $\dot{\theta}$ Ont des signes opposés .

Si $r=R$ le contact n'est pas ponctuelle.la sphère ne roule pas sans glissement.

2—l'énergie cinétique est :

$$\text{Ec}=\text{E}_c^*+\frac{1}{2}\text{m}\text{V}_{(C)}^2=\frac{1}{2}\,\text{J}\,\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\text{m}\,(\text{R-r})^2\,\dot{\alpha}^2=\left(\frac{7}{10}(R-r)^2\right)m\,\dot{\alpha}^2$$

L'énergie potentielle :

$$\text{Ep}=-\text{mg}\,(\text{R-r})\cos\alpha\;+\text{Cste}$$

Le système est conservatif, l'énergie mécanique $\text{E}_t=\text{Ec}+\text{Ep}$ est conservée, $\frac{d\text{E}_t}{dt}=0$ ce qui donne : $\boxed{\ddot{\alpha}(t)+\frac{5g}{7(R-r)}\sin\alpha(t)=0}$

3— la période des petites oscillations $\boxed{T_{po}=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}}$

4— la sphère qui glisse sans rouler arrivera la première :

En effet dans le cas d'un roulement sans glissement $\Rightarrow$

$$\text{Ec}=\text{E}_c^*+\frac{1}{2}\text{m}\text{V}_{(C)}^2=\frac{1}{2}\,\text{J}\,\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\text{m}\,(\text{R-r})^2\,\dot{\alpha}^2=\left(\frac{7}{10}(R-r)^2\right)m\,\dot{\alpha}_1^2$$

$$\text{Ep}=-\text{mg}\,(\text{R-r})\cos\alpha\;+\text{Cste}$$

Et dans le cas d'un glissement sans roulement $\text{E}_c^*=0\Rightarrow$

$$\text{Ec}=\cancel{\text{E}_c^*}+\frac{1}{2}\text{m}\text{V}_{(C)}^2=\frac{1}{2}\text{m}\,(\text{R-r})^2\,\dot{\alpha}^2=\left(\frac{1}{2}(R-r)^2\right)m\,\dot{\alpha}_2^2$$

$$\text{Ep}=-\text{mg}\,(\text{R-r})\cos\alpha\;+\text{Cste}$$

Donc $\left(\frac{7}{10}(R-r)^2\right)m\,\dot{\alpha}_1^2=\left(\frac{1}{2}(R-r)^2\right)m\,\dot{\alpha}_2^2$ càd $\boxed{\dot{\alpha}_2^2>\dot{\alpha}_1^2}$ le roulement sans glissement est plus rapide. Ce résultat ne dépend pas de la masse .

5— pour le cas d'un glissement sans roulement

$$\left(\frac{1}{2}(R-r)^2\right)\cancel{m}\,\dot{\alpha}^2+\cancel{m}\;\text{g}\,(\text{R-r})\left(\cos\alpha_0-\cos\alpha\right)=0\Rightarrow$$

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{g(R-r)(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{\frac{1}{2}(R-r)^2} \Rightarrow$$

$$\dot{\alpha} = -\sqrt{\frac{g(R-r)(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{\frac{1}{2}(R-r)^2}} \Rightarrow$$

$$dt = -\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(R-r)^2}{g(R-r)(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}\, d\alpha \Rightarrow \tau = -\int_{\alpha_0}^{0}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(R-r)^2}{g(R-r)(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}\, d\alpha$$

$$\boxed{\tau = -\sqrt{\frac{1}{2}(R-r)^2}\int_{\alpha_0}^{0}\frac{1}{\sqrt{g(R-r)(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}}\, d\alpha}$$

En déduit $\boxed{\tau' = -\sqrt{\frac{7}{10}(R-r)^2}\int_{\alpha_0}^{0}\frac{1}{g(R-r)(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}\, d\alpha}$

Le rapport est :

$$\boxed{\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{7}{5}}} \Rightarrow \tau' > \tau$$

FIN DE PARTIE I

II. — Rail suspendu

II.A. —Description du mouvement

6— par définition la *vitesse de glissement de la sphère S sur le rail en I à l'instant t* la vitesse définie par:

$$\vec{v}_g(I) = \vec{v}(I_S)_{/R} - \vec{v}(I_{Rail})_{/R}$$

On a $\vec{v}(I_S)_{/R} = ((R-r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta})\,\hat{\alpha}$ et $\vec{v}(I_{Rail})_{/R} = R\dot{\beta}\,\hat{\alpha}$

Le roulement est sans glissement $\vec{v}_g(I) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{((R-r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta}) = R\dot{\beta}}$

7—dans R_g le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{1C}}$ de la sphère en C **:** $\boxed{\overrightarrow{\sigma_{1C}} = J\,\dot{\theta}\,\hat{k}}$

Le théorème de Koenig donne $\overrightarrow{\sigma_{1O}} = \overrightarrow{\sigma_{1C}} + m\,\overrightarrow{OC} \wedge \vec{V}_{(C)} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\sigma_{1O}} = \left(J\dot{\theta} + m(R-r)^2\dot{\alpha}\right)\hat{k}}$

8— dans R_g le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{2O}}$ du rail en O : $\boxed{\overrightarrow{\sigma_{2O}} = J'\dot{\beta}\,\hat{k}}$

9— dans R_g l'énergie cinétique E_{CS} la sphère : $\boxed{E_{CS} = \frac{1}{2}J\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2}$

dans R_g l'énergie cinétique E_{CR} du rail : $\boxed{E_{CR} = \frac{1}{2}J'\dot{\beta}^2}$

l'énergie cinétique totale E_{CT} de l'ensemble rail-sphère est

$$\boxed{E_{CT} = \frac{1}{2}J\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J'\dot{\beta}^2}$$

10— on a $\frac{d\overrightarrow{\sigma_{TO}}}{dt} = \vec{\mathrm{M}}_O(m\vec{g}) + \vec{\mathrm{M}}_O(M\vec{g})$ et on projette sur Oz

$$\boxed{J\ddot{\theta} + m(R-r)^2\ddot{\alpha} + J'\ddot{\beta} = -mg(R-r)\sin\alpha - Mgl\sin\beta}$$

M EL ABDALLAOUI

11— on a $\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{1C}}}{dt} = \vec{\mathrm{M}}_C\left(m\vec{g}\right) + \vec{\mathrm{M}}_C\left(\vec{R}\right)$ avec $\vec{R} = T\ \hat{\alpha} + N\ \hat{r}$ l'action du rail sur la sphère :

$\Rightarrow J\ \ddot{\theta}\hat{k} = \overrightarrow{CI} \wedge (T\ \hat{\alpha}) + \overrightarrow{CI} \wedge (N\ \hat{r}) = rT\ \hat{k} \Rightarrow T = \dfrac{J}{r}\ddot{\theta} \Rightarrow T = \dfrac{J\ R}{r^2}\ddot{\beta} - J\ \dfrac{(R-r)}{r^2}\ddot{\alpha} \Rightarrow$

$\boxed{T = \dfrac{2}{5}m\ R\ \ddot{\beta} - \dfrac{2}{5}m(R-r)\ddot{\alpha}}$

12—

$\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{2O}}}{dt} = \vec{\mathrm{M}}_O\left(M\vec{g}\right) + \vec{\mathrm{M}}_O\left(-\vec{R}\right) \Rightarrow J'\ddot{\beta}\hat{k} = \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{g} + \overrightarrow{OI} \wedge (-N\ \hat{r} - T\ \hat{\alpha}) \Rightarrow$

$J'\ddot{\beta} = -Mgl\sin\beta - RT \Rightarrow J'\ddot{\beta} = -Mgl\sin\beta - \dfrac{2}{5}m\ R^2\ddot{\beta} + \dfrac{2}{5}m(R-r)R\ \ddot{\alpha} \Rightarrow$

$\left(J' + J\ \dfrac{R^2}{r^2}\right)\ddot{\beta} - \dfrac{2}{5}m(R-r)R\ \ddot{\alpha} = -Mgl\sin\beta \Rightarrow \boxed{A = \left(M + \dfrac{2}{5}m\right)R^2}$ et $\boxed{B = \dfrac{2}{5}m(R-r)R}$

13—

$\dfrac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\alpha} - \dfrac{2}{5}m(R-r)R\ddot{\beta} = -mg(R-r)\sin\alpha \Rightarrow \boxed{A' = \dfrac{7}{5}m(R-r)^2}$

Si $\ddot{\beta} = 0$ le rail est au repos. On retrouve l'équation de 2.

14—

On applique le théorème de l'énergie cinétique au rail

$\dfrac{dE_{CR}}{dt} = \overrightarrow{Mg}\vec{V}_{(G)} + (-\vec{T})\vec{v}\left(I_{Rail}\right)_{/R} \Rightarrow MR^2\ddot{\beta}\dot{\beta} = -Mgl\,\dot{\beta}\sin\beta - (\dfrac{2}{5}m\ R\ \ddot{\beta} - \dfrac{2}{5}m(R-r)\ddot{\alpha})R\,\dot{\beta}$

$\Rightarrow \boxed{(MR^2 + \dfrac{2}{5}m\ R^2)\ddot{\beta} - \dfrac{2}{5}m(R-r)R\ \ddot{\alpha} = -Mgl\sin\beta} \qquad (1)$

On multiplie l'équation (1) par B et l'équation (2) par A on fait la somme :

$\ddot{\alpha}(t) + \dfrac{mg(R-r)A}{AA' - B^2}\sin\alpha(t) = -BMgl\sin\beta(t)$ si $AA' - B^2 \neq 0$

Le système est oscillatoire si $\dfrac{mg(R-r)A}{AA'-B^2} > 0$ donc $\boxed{AA' - B^2 > 0}$

15— Absence de frottement visqueux.

II.B. — Modes d'oscillations

16—on a $\dfrac{d^2}{dt^2}\alpha(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}\mathrm{Re}(\underline{\alpha_0}e^{i\omega t}) = -\omega^2\alpha(t)$ de même

$\dfrac{d^2}{dt^2}\beta(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}\mathrm{Re}(\underline{\beta_0}e^{i\omega t}) = -\omega^2\beta(t)$

$$\begin{cases} -\omega^2 A\ \beta(t) - B\,\omega^2\alpha(t) = -D\ \beta(t) & (1) \\ -\omega^2 A'\alpha(t) - B\,\omega^2\beta(t) = -D'\ \alpha(t) & (2) \end{cases}$$

M EL ABDALLAOUI

$$\begin{cases}(D-\omega^2 A)\,\beta(t)-\ B\,\omega^2\ \ \alpha(t)=0 & (1)\\ -B\,\omega^2\ \beta(t)+(D'-\omega^2 A')\ \alpha(t)=0 & (2)\end{cases}$$

Les solutions sont non nulles si le déterminant est nulle :

$$(D-\omega^2 A)(D'-\omega^2 A')-B^2\omega^4=0 \Rightarrow \left(AA'-B^2\right)\omega^4-(DA'+D'A)\,\omega^2+DD'=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1=\sqrt{\frac{DA'+D'A+\sqrt{(DA'+D'A)^2-4(AA'-B^2)DD'}}{2(AA'-B^2)}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2=\sqrt{\frac{DA'+D'A-\sqrt{(DA'+D'A)^2-4(AA'-B^2)DD'}}{2(AA'-B^2)}}}$$

17— la solutions générale du système différentiel est une combinaison linéaire de solutions complexes de la forme $e^{i\omega_1 t}$, $e^{-i\omega_1 t}$, $e^{i\omega_2 t}$, $e^{-i\omega_2 t}$. **Par conséquent**

$\alpha(t)=\alpha_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+\alpha_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$ **et** $\beta(t)=\beta_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+\beta_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

Les conditions initiales A t=0 donne :

$$\alpha(0)=\alpha_1\cos(\varphi_1)+\alpha_2\cos(\varphi_2)=\alpha_0 \qquad (a)$$

$$\dot\alpha(0)=-\alpha_1\omega_1\sin(\varphi_1)-\alpha_2\omega_2\sin(\varphi_2)=0 \qquad (b)$$

$$\beta(0)=\beta_1\cos(\varphi_1)+\beta_2\cos(\varphi_2)=0 \qquad (c)$$

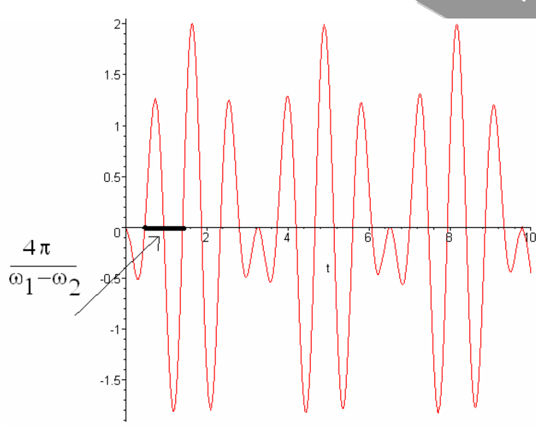
$$\dot\beta(0)=-\beta_1\omega_1\sin(\varphi_1)-\beta_2\omega_2\sin(\varphi_2)=0 \qquad (d)$$

Les amplitudes α_1 , α_2 , β_1 et β_2 ne sont pas indépendantes. D'après les équations 1 et 2 de la question 16 on a $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=\dfrac{A\omega_1^2-D}{B\omega_1^2}=\dfrac{B\omega_1^2}{A'\omega_1^2-D'}=\dfrac{1}{C_1}$

$$\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{A\omega_2^2-D}{B\omega_2^2}=\frac{B\omega_2^2}{A'\omega_2^2-D'}=\frac{1}{C_2}$$

$\Rightarrow$ $\sin\varphi_1=\sin\varphi_2=0$ **et** $\beta_1=-\beta_2=\eta$ **donc** $\boxed{\beta(t)=\eta(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t)}$

18—on a $\beta(t)=\eta\left[\cos(\omega_1 t)-\cos(\omega_2 t)\right]=2\eta\sin\left[(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2})t\right]\sin\left[(\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2})t\right]$



Cette courbe est tracée par Maple

AN les valeurs des pulsations propres

ω_1=7,694rad/s ω_2=5,765rad/s

M EL ABDALLAOUI

on déduit $T_b = \dfrac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} = 0.93s$

valeur compatible avec le résultat obtenu sur la courbe $T_b = 1s$

FIN DE LA PARTIE II

III. Oscillations électriques

19—on a

$i_1 = -\dfrac{dq_1}{dt}$, $i_2 = \dfrac{dq_2}{dt}$

$i = i_1 + i_2$

$L\dfrac{di}{dt} = -L_1\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{q_1}{C_1} = -L_2\dfrac{di_1}{dt} - \dfrac{q_2}{C_2}$

On déduit

$\boxed{C_1C_2(L+L_1)\ddot{q}_1 - LC_1C_2\ddot{q}_2 = -C_2q_1}$

$\boxed{C_1C_2(L+L_1)\ddot{q}_2 - LC_1C_2\ddot{q}_1 = -C_1q_2}$

20—

$A \Leftrightarrow C_1C_2(L+L_1)$

$A' \Leftrightarrow C_1C_2(L+L_2)$

$D \Leftrightarrow C_2$

$D' \Leftrightarrow C_1$

$B \Leftrightarrow LC_1C_2$

On vérifie que $AA' - B^2 > 0$

La capacité stocke l'énergie sous forme potentielle en se chargeant, la self-induction stocke l'énergie sous forme cinétique lorsqu'elle est parcourue par un courant .le couplage est inductif . la self L assure le couplage des circuits L_1, C_1 et L_2, C_2

Mécaniquement Le couplage est inertiel .

$m \Leftrightarrow L$ $\quad \alpha(t) \Leftrightarrow q_1(t)$ $\quad \beta(t) \Leftrightarrow q_2(t)$ $\quad m_1 \Leftrightarrow L_1$ $\quad m_2 \Leftrightarrow L_2$

M EL ABDALLAOUI

FIN