

Essuie-vitre à détecteur de pluie.

A.1) RFD à 1 goutte : $\vec{0} = \frac{4}{3} \pi r_e^3 \mu \vec{g} - 6\pi\eta r_e \vec{v}_{lim}$ (poussée d'Archimède négligée car $\mu_{air} \ll \mu_{eau}$), d'où

$$\vec{v}_{lim} = \frac{2}{9} \frac{\mu r_e^2}{\eta} \vec{g} . \text{ A.N. } 1,28 \text{ m.s}^{-1}, \text{ ou } 4,62 \text{ km.h}^{-1} .$$

A.2) On calcule déjà le nombre n de gouttes par unité de volume : sur une surface S horizontale, il tombe en Δt un nombre de gouttes $N = S v_{lim} \Delta t n$, soit un volume d'eau $V = N \frac{4}{3} \pi r_e^3$ ou une hauteur d'eau

$$h = \frac{V}{S} = \frac{4}{3} \pi r_e^3 v_{lim} \Delta t n . \text{ Donc } n = \frac{h}{\Delta t} \times \frac{3}{4\pi r_e^3 v_{lim}} = \frac{h}{\Delta t} \times \frac{27\eta}{8\pi\mu r_e^5 g} . \text{ A.N. } n \approx 517.10^3 \text{ gouttes.m}^{-3} .$$

On néglige l'écoulement de l'eau sur le pare-brise, donc tout ce qui tombe est évacué par les essuie-vitres. Ce qui tombe en T est contenu dans le cylindre de base la surface de pare-brise balayée S , de génératrices verticales, de hauteur suivant la verticale $v_{lim}T$, et donc de volume

$$V = S \cos\beta v_{lim}T . \text{ Le nombre de gouttes est } N = nV .$$

Or $S = S_p + S_c - S_{commune}$ avec $S_{commune} = \frac{1}{10} S$, donc $S = \frac{10}{11} (S_p + S_c)$.

On a $S_p = \frac{1}{4} \pi \left[\left(d_p + \frac{l_p}{2} \right)^2 - \left(d_p - \frac{l_p}{2} \right)^2 \right] = \frac{\pi}{2} l_p d_p$ et idem pour S_c . Au final

$$S = \frac{5}{11} \pi (l_p d_p + l_c d_c) \approx 0,87 \text{ m}^2 .$$

Donc $N = \frac{5}{11} \pi (l_p d_p + l_c d_c) n \cos\beta v_{lim}T \approx 757.10^3$ gouttes, ou une masse $m = N \frac{4}{3} \pi r_e^3 \mu \approx 3,17 \text{ g}$.

A.3) Les gouttes d'eau qui vont frapper la surface S entre $t = 0$ et $t = T$ sont, à $t = 0$, contenues dans un cylindre de base S de génératrices inclinées d'un angle α sur l'horizontale

avec $\tan \alpha = \frac{v_{lim}}{v_{voiture}} \approx 0,042$ (voir figure ; angle α exagéré),

génératrices de longueur $\frac{v_{voiture}T}{\cos \alpha}$. Le nombre de gouttes est

alors
$$N = nV = nS \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta \right) \frac{v_{voiture}T}{\cos \alpha}$$

$\approx 8,37.10^6$ gouttes, soit une masse de 35,1 g.

Remarque : si on considère que $v_{lim} \ll v_{voiture}$, et donc que $\alpha \approx 0$, on trouve $N = nS \sin \beta v_{voiture}T \approx 7,89.10^6$ gouttes,

$m \approx 33,1 \text{ g}$, soit une erreur de 6%.

A.4) On remplace dans la formule du A.3 S par $S' = 5 \text{ cm}^2$ et T par $T' = 0,01 \text{ s}$; alors $N \approx 48$ gouttes.

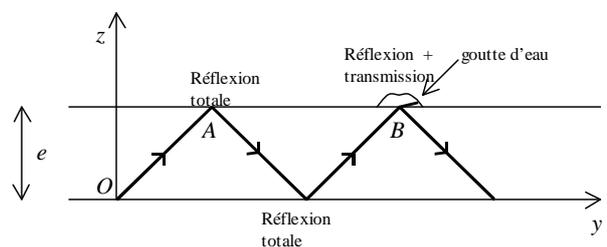
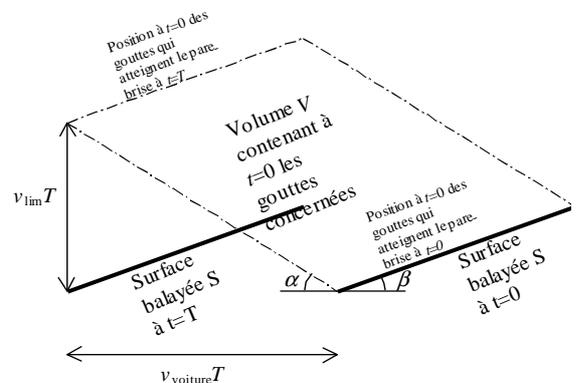
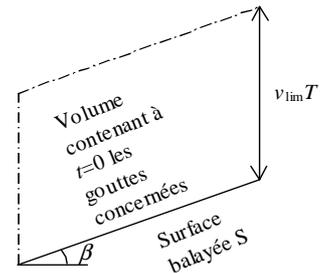
B.5) $\sin i_{lim} = \frac{n_2}{n_1}$ donc

- verre / air : $i_{lim} \approx 0,730 \text{ rad} \approx 41^\circ 49'$
- verre / eau : $i_{lim} \approx 1,090 \text{ rad} \approx 62^\circ 27'$
- eau / air : $i_{lim} \approx 0,851 \text{ rad} \approx 48^\circ 45'$

B.6) Voir figure. On n'a pas représenté le devenir du rayon transmis dans la goutte.

B.7) Si le rayon rencontre une goutte d'eau, il n'y a plus réflexion totale et donc il y a affaiblissement de l'intensité de l'onde.

B.8) La surface « utile » du détecteur est plus grande : si on a un seul rayon, seuls deux points (A et B) du détecteur sont « testés » par le rayon.



La section du faisceau après un parcours de $l = 4 \frac{e}{\cos \frac{\pi}{4}} \approx 5,7 \text{ cm}$ est de $\pi \left(l \frac{\theta}{2} \right)^2 \approx 7,7.10^{-5} \text{ m}^2 = 77 \text{ mm}^2$. Le

dispositif à prismes doit donc concentrer l'onde sur la diode réceptrice.

B.9) $\vec{\text{rot}} \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ (MF) $\vec{\text{rot}} \vec{H}_1 = \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t}$ (MA sans charges libres) $\text{div} \vec{D}_1 = 0$ (MG sans charges

libres) $\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0}$ (milieu non magnétique) $\vec{D}_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \vec{E}_1$ (DLHI)

(MG) + (DLHI) $\rightarrow \text{div} \vec{E}_1 = 0$; (MA) $\rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B}_1 = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$; $\vec{\text{rot}}(\text{MF}) \rightarrow -\nabla^2 \vec{E}_1 = -\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r1} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2}$

et la relation demandée, avec $\epsilon_{r1} = n_1^2$.

B.10) La relation du B.9, donne, pour l'onde incidente, $k_i^2 = n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2}$. Donc (on suppose k_{iy} et k_{iz} positifs) :

$k_{iy} = k_i \sin \alpha_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \alpha_1$. Pour l'onde réfractée, la relation du B.9 donne

$-k_{iy}^2 E_{t2}(z) + \frac{d^2 E_{t2}}{dz^2} = -\frac{n_2^2}{c^2} \omega^2 E_{t2}(z)$. Avec $\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}$, on arrive à :

$\frac{d^2 E_{t2}}{dz^2} + (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1) \frac{4\pi^2}{\lambda^2} E_{t2}(z) = 0$.

B.11) Onde réfractée est progressive sans amortissement si $E_{t2}(z)$ est en $\exp(-jk_{tz}z)$ avec $k_{tz} \in \mathbb{R}^+$. Possible seulement si $n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1 > 0$, c'est-à-dire $\sin \alpha_1 < \frac{n_2}{n_1}$ ou encore $\alpha_1 < i_{\text{lim}}$: OK. Et alors

$\left. \begin{array}{l} k_{tx} = 0 \\ k_{ty} = n_1 \frac{2\pi}{\lambda} \sin \alpha_1 \\ k_{tz} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1} \end{array} \right\}$. Alors $k_t^2 = n_2^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = n_2^2 \frac{\omega^2}{c^2}$ OK. Et $\sin \alpha_2 = \frac{k_{ty}}{k_t} = \frac{n_1 \sin \alpha_1}{n_2} \rightarrow$ loi de

Descartes de la réfraction.

B.12) Onde réfractée amortie, au contraire, si $n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_1 < 0$ (ou $\alpha_1 < i_{\text{lim}}$). $E_{t2}(z)$ est alors en $\exp\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha_1 - n_2^2} z\right)$. D'où une épaisseur de peau $\delta = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \alpha_1 - n_2^2}}$. A.N. pour dioptré verre /

air et $\alpha_1 = 45^\circ$: $\delta = \frac{\lambda}{2,22}$. C'est le cas de la réflexion totale en optique géométrique.

B.13) Effet tunnel : traversée d'une barrière de potentiel a priori infranchissable (énergie plus élevée que celle du système). Application pratique : microscopie à effet tunnel.

Dans la situation étudiée : placer une seconde lame de verre parallèlement au pare-brise, à une distance d'au maximum quelques δ de ce dernier ; on récupérerait une onde progressive non amortie dans cette seconde lame. Difficulté pratique : la très faible valeur de δ (de l'ordre de 270 nm dans le visible) ; les deux lames devraient être séparées de 1 μm maximum environ !

Mise en évidence de l'effet tunnel en TP au lycée : avec des ondes millimétriques et dioptrés paraffine / air.

B.14) Attention erreur d'énoncé : le dioptré est verre / eau et non verre / air !

$\text{div} \vec{B} = 0 \rightarrow$ composante normale de \vec{B} continue

$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (milieu non magnétique et $\vec{J}_{\text{libre}} = 0$) \rightarrow composante tangentielle de \vec{B} continue

$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}} = 0 \rightarrow \text{div} \vec{E} = 0$ (DLHI) \rightarrow composante normale de \vec{E} continue

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow$ composante tangentielle de \vec{E} continue. Donc \vec{E} et \vec{B} sont continus à la traversée du dioptre.

B.15) Remarque préliminaire : $\alpha_1 < i_{\text{lim}}$ donc il n'y a pas réflexion totale, et $\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1\right) \approx 0,923 \text{ rad} = 53^\circ$. Et

$$k_{iy} = k_{ty} = k_{ry}.$$

Remarque sur l'énoncé : petite erreur d'énoncé ; les expressions de r et t données en B.16 correspondent à un dioptre situé en $z=0$ et non en $z=e$ comme indiqué. On considère pour la suite que le dioptre est placé en $z=0$.

La continuité de \vec{E} donne $1+r=t$. $\vec{B}_{i1} = \frac{E_{01}}{\omega} \vec{k}_i \wedge \vec{e}_x$ et

relations similaires pour \vec{B}_{r1} et \vec{B}_{t2} . La continuité de \vec{B} , projetée

sur la direction $y'y$ mène alors, en tenant compte de $k_{rz} = -k_{iz}$, à $(1-r)k_{iz} = tk_{iz}$. Or $k_{iz} = n_1 \frac{\omega}{c} \cos \alpha_1$ et

$$k_{iz} = n_2 \frac{\omega}{c} \cos \alpha_2. \text{ Donc on a } 1-r = t \frac{n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1}.$$

B.16) La résolution du système en (r,t) mène à l'expression voulue pour t (en utilisant $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$), mais

pour r l'énoncé comporte une erreur de signe : c'est $r = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$.

B.17) A.N. $t \approx 1,14$. L'amplitude de l'onde transmise est supérieure à celle de l'onde incidente.

B.18) T et R sont définis à partir des flux énergétiques moyens (valeurs moyennes des vecteurs de Poynting), dans lesquels l'indice n_i intervient. $T \neq t^2$ car l'onde transmise et l'onde réfléchie ne se propagent pas dans le même milieu (au contraire de l'onde réfléchie et de l'onde incidente $\rightarrow R = r^2$). $R + T = 1$ (conservation de l'énergie).

B.19) A.N. $T = t^2 \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \approx 0,981$ et $R = 1 - T \approx 0,019$. Il pourrait sembler qu'une électronique de détection

sommaire puisse suffire, tant l'onde réfléchie est plus faible que dans le cas du pare-brise sec (pour lequel $R = 1$). Mais cette affirmation doit être tempérée par le fait que tout le détecteur n'est pas recouvert d'eau mais que seule une partie (à déterminer) de sa surface l'est, par de petites gouttes. Il faut une étude plus approfondie.

B.20) $v_s = -Ri$ où v_s est la tension de sortie et i l'intensité dans la diode. Il faut donc que i soit proportionnelle au flux Φ , ce qui se produit dans la partie horizontale de la caractéristique de la diode, pour u négatif (ou faiblement positif). Or $u = u_0$. On peut donc prendre par exemple $u_0 = -5 \text{ V}$, et R de l'ordre de quelques $\text{k}\Omega$ (pour avoir v_s de l'ordre de quelques V, puisque i de l'ordre de quelques mA).

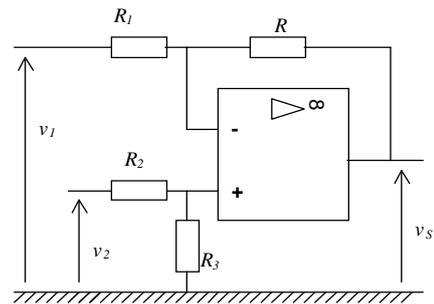
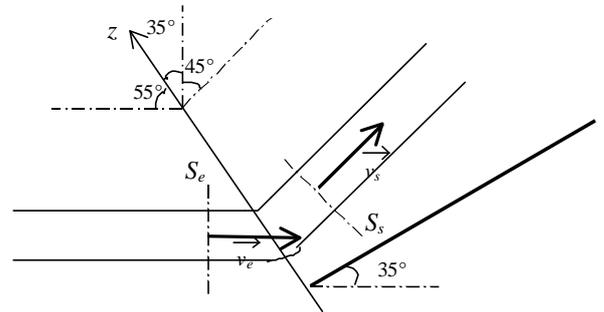
B.21) Variation de l'intensité du signal émis ? (vieillessement de la DEL émettrice ?). Par ailleurs, comment le système distingue-t-il entre une baisse du signal de réception dû à de la pluie et une baisse due à une baisse de luminosité extérieure ? à quelle λ fonctionne-t-il ? L'énoncé ne le dit pas...

Montage soustracteur ci-contre (avec amplifications séparées de chaque signal) ; résistances de l'ordre du $\text{k}\Omega$:

$$v_s = -\frac{R}{R_1} v_1 + \frac{R_1 + R}{R_1} \frac{R_3}{R_2 + R_3} v_2$$

C.22) Célérité du son dans l'air $c_{\text{son}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,314 \times 275,15}{0,029}} \approx 332 \text{ m.s}^{-1}$. Vitesse de la voiture

$$v_{\text{voiture}} = \frac{110000}{3600} \approx 31 \text{ m.s}^{-1}. v_{\text{voiture}} \ll c_{\text{son}} \text{ donc écoulement incompressible.}$$



Référentiel de la voiture (galiléen car $\vec{v}_{voiture}$ est constante). Système ouvert $\Sigma(t)$ formé de l'air du filet compris entre deux sections fixes S_e et S_s , l'une avant le déflecteur et l'autre après. Système fermé Σ^* pris entre deux instants proches t et $t + dt$: à t , $\Sigma^* = \Sigma(t) + dm_e$ qui va passer en S_e entre t et $t + dt$; à $t + dt$, $\Sigma^* = \Sigma(t+dt) + dm_s$ qui est passée en S_s entre t et $t + dt$.

Bilan de masse $\rightarrow dm_e = dm_s$ noté dm et $\frac{dm}{dt} = \rho S v_{voiture}$.

Bernoulli entre S_e et S_s : $v_e = v_s$ ($= v_{voiture}$).

RFD à $\Sigma^* \rightarrow \frac{d\vec{p}^*}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}$, avec $d\vec{p}^* = \vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t) = dm(\vec{v}_s - \vec{v}_e)$. Parmi les forces, on néglige le

poids, les forces de pression se compensent toutes, il ne reste que $\vec{F}_{déflecteur \rightarrow air}$.

Donc $\vec{F}_{air \rightarrow déflecteur} = \rho S v_{voiture} (\vec{v}_e - \vec{v}_s)$.

C.23) Air gaz parfait $\rightarrow \rho = \frac{PM}{RT} \approx \frac{10^5 \times 0,029}{8,314 \times 275,15} \approx 1,27 \text{ kg.m}^{-3}$.

Donc $F_0 = \rho S v_{voiture}^2 (-\cos 55^\circ + \cos 80^\circ) \approx -4,73 \text{ N}$.

C.24) $\theta(t) = \int_0^t \Omega(t') dt'$ (si on prend $\theta = 0$ au repos, à $t = 0$). Donc $\theta\left(\frac{T}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{T}{2}} \Omega(t') dt' = -\frac{2}{5} T \Omega_{max}$

(aire sous l'axe des x). D'où $\Omega_{max} = \frac{5\pi}{4T}$.

- A.N. Intermittent et petite vitesse $\Omega_{max} \approx 2,45 \text{ rad.s}^{-1}$
- Grande vitesse $\Omega_{max} \approx 3,93 \text{ rad.s}^{-1}$

C.25) Côté passager : pas de déflecteur, la seule force normale est $F = 15 \text{ N}$ due au ressort, uniformément répartie. La force tangentielle est alors fF , uniformément répartie (sur l'élément de longueur dl , la force tangentielle est $fF \frac{dl}{l_p}$).

Ainsi $M_p = \pm \int_{d_p - \frac{l_p}{2}}^{d_p + \frac{l_p}{2}} l \frac{fF dl}{l_p} = \pm fF d_p$. C'est un couple résistant donc son signe est l'opposé de celui de Ω .

Côté conducteur : même calcul mais maintenant la force normale est $F + |F_0|$; on a donc $M_c = \pm f(F + |F_0|)d_c$ (signe là aussi opposé à celui de Ω).

Remarque : $\left| \frac{M_c}{M_p} \right| = \left(1 + \frac{|F_0|}{F} \right) \frac{d_c}{d_p} \approx 1,58$ au lieu de $\frac{3,4}{1,8} \approx 1,89$ donné par l'énoncé. Erreur ?

C.26) Les essuie-vitres sont des solides en rotation autour d'axes fixes (dans le référentiel voiture, galiléen). Donc

$J_p \frac{d\Omega}{dt} = M_p + C_{mp}$ et $J_c \frac{d\Omega}{dt} = M_c + C_{mc}$. Même Ω pour les deux essuie-vitres, un seul moteur. La somme

donne $(J_p + J_c) \frac{d\Omega}{dt} = M_p + M_c + C_m$ donc $C_m = (J_p + J_c) \frac{d\Omega}{dt} - M_p - M_c$.

T	0	T/10	4T/10	T/2	6T/10	9T/10	T
$\frac{d\Omega}{dt}$	$-10 \frac{\Omega_{max}}{T}$	0	$10 \frac{\Omega_{max}}{T}$	$10 \frac{\Omega_{max}}{T}$	0	$-10 \frac{\Omega_{max}}{T}$	
M_p	>0	>0	>0	<0	<0	<0	
M_c	>0	>0	>0	<0	<0	<0	

C_m (en N.m)	-32,7	-5,2	+22,3	+32,7	+5,2	-22,3
----------------	-------	------	-------	-------	------	-------

C.27) La puissance consommée est $P = C_m \Omega$ (car rendement du moteur=1). Elle est maximale à $t = \frac{T}{10}$ et $t = \frac{6T}{10}$,

où elle vaut $32,7 \Omega_{\max} \approx 128 \text{ W}$. Or $P = UI$ où $U = 12 \text{ V}$ pour une voiture moderne. Donc $I_{\max} \approx 10,7 \text{ A}$.

C.28) C'est une intensité importante. Dispositif qui consomme le plus : le démarreur (de l'ordre de 100 A ou plus).

