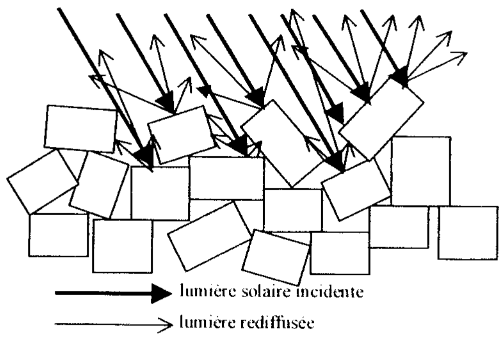
Mines-Ponts PC 03 (Extrait)

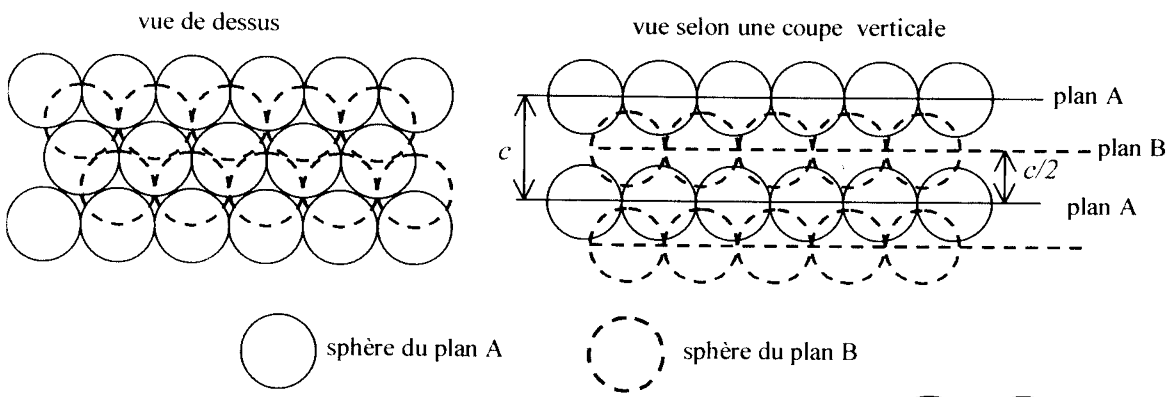
10*) Une surface poussiéreuse est forcément lacunaire. Les poussières étant de dimensions qui ne sont pas très grandes par rapport aux longueurs d'onde considérées, elles vont diffuser partiellement la lumière solaire incidente un peu dans toutes les directions (une autre partie étant naturellement absorbée) ; mais une partie de la lumière diffusée va être piégée dans les lacunes de la surface, et ne pourra donc être renvoyée vers l'espace, comme l'indique le schéma ci-contre, où, pour des raisons de commodité de dessin, les poussières ont été représentées parallélépipédiques, de taille et d'orientation variables...



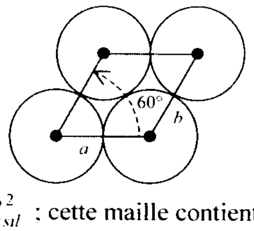
11*) • le transfert thermique par conduction d'une sphère à l'autre est pratiquement interdit par le fait que le contact entre les différentes sphères est ponctuel (le flux diffusif $\Phi_{th} = j_{th} S_{contact}$ est donc quasi nul).

- le transfert thermique convectif est interdit car :
  + l'empilement compact des sphères limite énormément le développement de courants macroscopiques de convection d'un fluide éventuel.
  + et surtout, il n'y a pas de fluide pour assurer la convection : la Lune n'a pas d'atmosphère.

12*) Il y a deux types de plans réticulaires horizontaux, décalés les uns par rapport aux autres (plans A et B) :



Deux plans successifs A et B sont bien séparés de $c/2$; chaque plan étant compact, on peut le considérer comme continu (la surface des « jours » est faible : on peut calculer la compacité en surface en examinant une maille élémentaire d'un plan :



On a $a = b = 2R_{sil}$, l'aire de la maille du plan est donc $4R_{sil}^2 \sin(60°) = 2\sqrt{3}R_{sil}^2$; cette maille contient en propre une sphère, qui masque la surface πR_{sil}^2 : la proportion de surface masquée est donc $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0{,}91 \approx 1$: la proportion de « jours » est donc faible, il n'est pas illégitime de considérer chaque plan comme opaque).

Le transfert thermique d'un plan à l'autre se fait alors par rayonnement.

Rem : comme visiblement $c > 2R_{sil}$, la valeur de c donnée par l'énoncé est manifestement fausse. En réalité,

$$c = 4\sqrt{\frac{2}{3}}R_{sil} = 3{,}266R_{sil}$$

13) En prenant une température du sol lunaire égale à 290 K comme à la question 19), on calcule :
$\lambda(290\ \text{K}) = 37{,}8\ \text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1} > K_{Sil}$! Ce résultat est surprenant et en contradiction avec l'affirmation de la question 7) qui parlait d'une conductivité thermique très faible de la couche de poussière… on peut avoir un doute sur la valeur donnée de α …

Rem : évaluation de la constante α. On considère uniquement les transferts par rayonnement entre les plans opaques, assimilés à des corps noirs. Plaçons-nous entre deux plans successifs, l'un à la cote z_0, de température $T(z_0)$, l'autre à la cote $z_0+c/2$, de température $T(z_0+c/2)$: comme les plans sont infinis, le flux surfacique surfacique de rayonnement montant est, selon la loi de Stefan (σ représentant la constante de Stefan) :

$$j_{ray} = \sigma[T^4(z_0) - T^4(z_0 + c/2)] \approx -2\sigma c T^3(z_0)\frac{\partial T}{\partial z}(z_0) = -\lambda(T(z_0))\frac{\partial T}{\partial z}(z_0)$$ ce qui

donne $\lambda = 2\sigma c T^3 \Rightarrow \alpha = 2c\sigma = 1{,}85.10^{-11}\ \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-4}$. On en déduit alors une conductivité thermique à 290 K égale à $\lambda(290\ \text{K}) = 4{,}5.10^{-4}\ \text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1} << K_{Sil}$ ce qui serait plus satisfaisant.

14) Les capacités thermiques massiques de la poussière et des silicates sont évidemment les mêmes, mais, d'après la valeur de la compacité, $d = 0{,}74 d_{sil}$.

15*) Les couches les plus profondes sont évidemment les plus tassées, ce sont donc elles qui se rapprochent le plus de ce modèle compact.

16) La vitesse de la Lune dans le référentiel géocentrique est $V_{L/géoc} = \omega_{LT} D_{LT} = \dfrac{2\pi}{P_L} D_{LT} \approx 1\ \text{km.s}^{-1}$.

Le référentiel géocentrique est en translation par rapport au référentiel de Copernic, la vitesse d'entraînement étant
$V_{T/Copernic} = \omega_{ST} D_{ST} = \dfrac{2\pi}{P_{ST}} D_{ST} \approx 30\ \text{km.s}^{-1}$.

Selon la position de la Lune, sa vitesse dans le référentiel de Copernic varie donc en module de 29 à 31 km.s^{-1}, la vitesse relative de l'astéroïde (supposé alors immobile dans le référentiel de Copernic) *à l'infini de la Lune* est bien de l'ordre de 30 km.s^{-1} $= V_{\infty/L}$, dans le référentiel « lunocentrique ».

Pour trouver sa vitesse dans le référentiel lunocentrique au moment de l'impact, soit $V_{0/L}$ il faut écrire la conservation de l'énergie : à l'infini : $E_m = \dfrac{1}{2} m V_{\infty/L}^2 = \dfrac{1}{2} m V_{0/L}^2 - \dfrac{G M_L m}{R_L} \Rightarrow V_{0/L} = \sqrt{V_{\infty/L}^2 + \dfrac{2GM_L}{R_L}} \approx 30$ km.s^{-1} car

$V_{\infty/L} >> \sqrt{\dfrac{2GM_L}{R_L}} \approx 2{,}4$ km.s^{-1} : l'accélération de l'astéroïde par la gravitation lunaire joue un effet négligeable.

17) Admettons que toute l'énergie cinétique serve à chauffer puis liquéfier entièrement une masse m_2 de sol lunaire. Donc :
$\dfrac{1}{2} m_1 V_{0/L}^2 = \Delta H(m_2) = H(m_{2liq}, T_F) - H(m_{2sol}, T_{sL}) = m_2 c_{sil}(T_F - T_{sL}) + m_2 L_f$ où T_{sL} représente la température initiale du sol lunaire (soit par exemple 290 K). On trouve alors un rapport :

$$\boxed{\frac{m_2}{m_1} = \frac{V_{0,L}^2}{2[c_{sil}(T_F - T_{sL}) + L_f]} = 380} >> 1$$ (le devenir de m_1 n'a donc guère d'influence dans la valeur de ce rapport).

18*) On obtient après solidification des silicates dans un état vraisemblablement vitreux dont la conductivité thermique doit se rapprocher de K_{sil}, la conductivité de la couche superficielle doit donc localement augmenter.

19) Classiquement, l'équation de la chaleur dans un milieu homogène de masse volumique μ_{sil}, de capacité thermique c_{sil}, de conductivité thermique K_{sil} s'écrit, en présence de la puissance volumique p_L :

$$\boxed{\mu_{sil} c_{sil} \frac{\partial T}{\partial t} = K_{sil} \Delta T + p_L}$$

Ici, on est en régime permanent, donc $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, et par symétrie, la température ne dépend que de r :

$$\Delta T = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}T}) = \mathrm{div}(\frac{\partial T}{\partial r}\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{p_L}{K_{sl}}$$ d'après l'équation de la chaleur.

Donc : $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{p_L}{K_{sl}}r^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{p_L}{3K_{sl}}r + \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow T(r) = -\frac{p_L}{6K_{sl}}r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$

C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration successives qu'on trouve par les conditions aux limites :

+ en $r = 0$, la température ne peut diverger, donc $C_1 = 0$

+ en $r = R_L$ la température est connue, soit $T_{s,L} \Rightarrow T_{s,L} = -\frac{p_L}{6K_{sl}}R_L^2 + C_2$, d'où C_2.

Pour finir, on a bien : $\boxed{T(r) = T_{s,L} + \frac{p_L}{6K_{sl}}(R_L^2 - r^2)}$.

20) On trouve alors : $T(r=0) = T_{s,L} + \frac{p_L}{6K_{sl}}R_L^2 = 4800$ K : a priori, la roche est dans l'état liquide.

21) On cherche le rayon R_F tel que $T(R_F) = T_F = 1500$ K : $R_F^2 = R_L^2 - \frac{6K_{sl}}{p_L}(T_F - T_{s,L})$.

On trouve $R_F = 1490$ km, l'épaisseur du manteau solide de la Lune serait alors de 250 km. Cependant, on a considéré que la température de fusion des roches était toujours de 1500 K ; or la température de fusion augmente généralement avec la pression, et donc avec la profondeur dans le sol lunaire : T_F est sous-estimée, l'épaisseur du manteau solide aussi.

22) La puissance volumique fournie par les désintégrations radioactives décroît dans le temps. Soit n_0 la densité particulaire initiale en ^{40}K ; l'origine des dates étant prise à la formation de la Lune, cette densité décroît exponentiellement, comme $n(t) = n_0 e^{-t/\tau}$. La période radioactive est la durée T telle que $n(T) = \frac{n_0}{2} \Rightarrow \tau = \frac{T}{\ln 2} = 2{,}16.10^9$ a.

A la date t, le nombre de désintégrations par unité de volume et de temps est $-\frac{dn}{dt} = \frac{n_0}{\tau}e^{-t/\tau}$; si chaque désintégration fournit l'énergie e^*, la puissance volumique libérée à la date t est donc $p_L(t) = \frac{n_0 e^*}{\tau}e^{-t/\tau} = p_{L0}e^{-t/\tau}$. On en déduit la puissance volumique initiale : $p_{L0} = p_L(t)\exp(\frac{t\ln(2)}{T}) = 8.10^{-8}$ W.m^{-3}.

Le même calcul qu'à la question précédente donne alors $R_{F0} = 1710$ km, soit une épaisseur initiale du manteau solide de 30 km, avec toutes les approximations précédentes.

23*) S'il n'y a plus de noyau liquide conducteur, il n'y a plus de courant électrique : en gros, $\vec{H}$ s'annule ; la seule source résiduelle de champ magnétique pourrait être l'aimantation rémanente des roches solidifiées, si tant est qu'elles possèdent des composants ferromagnétiques. En bref, le champ magnétique résiduel est vraisemblablement très faible...

24) La loi donnée $P = \frac{1}{3}nmv^2$ jointe à celle des gaz parfaits : $P = \frac{Nk_BT}{V} = nk_BT$ permet de retrouver

$\boxed{v = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}} = 4{,}32.10^2$ m.s^{-1}.

25) Soit un objet ponctuel de masse m lancé à la vitesse v_0 depuis le sol lunaire : il pourra échapper à l'attraction lunaire si son énergie mécanique est positive, c'est à dire :

$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_Lm}{R_L} \geq 0 \Rightarrow v_0 \geq \boxed{v_l = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}} = 2{,}38.10^3$ m.s^{-1}. Cette vitesse n'est pas très supérieure à la vitesse « thermique » moyenne, une proportion faible mais non négligeable des molécules d'argon auront une vitesse supérieure à v_l et l'atmosphère s'échappe en permanence.