Jean-Marie DELORME jean-marie.delorme@fnac.net
François-Xavier COQ francois.coq@ac-orleans-tours.fr
Jacki LUCAS jackilucas@aol.com
Lycée POTHIER ORLEANS

Si vous notez des erreurs, merci de nous les signaler.

2003 MINES PONTS
Seconde épreuve de Physique
Filière PC

PRODUCTION ET STOCKAGE D'HOLOGRAMMES

Partie I: Hologrammes minces

- 1- $\underline{s}(M,t) = \underline{s}_{obj} + \underline{s}_{réf} = A_{obj}(M)\exp[i(\omega t - \psi(M)] + A_{réf}\exp[i(\omega t - \mathbf{k_{réf}.OM})]$.

$I(M) = \underline{s}(M,t) \times \underline{s}^*(M,t)$ donne alors: $I(M) = I_{obj}(M) + I_{réf} + 2\,A_{obj}(M)\,A_{réf}\cos(\psi(M) - \mathbf{k_{réf}.OM})$

- 2- $t(x,y,0) = t_0\,\{1 + 2\,\varepsilon\cos(\psi(M) - \mathbf{k_{réf}.OM}) + \varepsilon^2\}^{-\gamma/2} = t_0\{1 - \gamma\,\varepsilon\cos(\psi(M) - \mathbf{k_{réf}.OM}) + \ldots\}$

d'où $t(x,y,0) = t_0\,\{1 - \gamma\,\varepsilon\,\cos(\psi(M) - k_{réf}\,x\sin(\varphi)\}$.

- 3- D'après le principe de Huygens Fresnel, l'onde émise par la surface dS est égale à l'onde avant x $t(x,y,0)$ dS: $\mathrm{d}s(M,t) = \mathrm{d}S\,A_{réf}\exp\{i(\omega t - \mathbf{k_{réf}.OM})\}\,t(x,y,0)$

En remplaçant $\cos(\alpha)$ par $\frac{1}{2}(\exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha))$, il vient:

$$\mathrm{d}s(M,t) = \mathrm{d}S\,A_{réf}\,t_0\,\{\exp(i(\omega t - k_{réf}.OM)) - \frac{\gamma}{2}\frac{A_{obj}}{A_{réf}}\exp(i(\omega t + \psi(M) - 2\,k_{réf}.OM)) - \frac{\gamma}{2}\frac{A_{obj}}{A_{réf}}\exp(i(\omega t - \psi(M))$$

donc: $A_1 = t_0\,A_{réf}$; $\varphi_1 = \mathbf{k_{réf}.OM} = k_{réf}\,x\sin(\varphi)$; $A_2 = -\,t_0\,\frac{\gamma}{2}\,A_{obj}(M)$; $\varphi_2 = -\varphi(M) + 2\,\mathbf{k_{réf}.OM}$ et $A_3 = -\,t_0\,\frac{\gamma}{2}\,A_{obj}(M)$; $\varphi_3 = \varphi(M)$.

La troisième onde est donc semblable à l'onde issue de l'objet.

(c'est la démodulation synchrone)

- 4- $I(M) = I_0\,(1 + m\cos(\mathbf{\Delta k.OM}))$, avec $m = 2\,\varepsilon$, $I_0 = I_{réf}$; $\mathbf{\Delta k = k_{obj} - k_{réf}}$ et $\mathbf{\Delta k.OM} = -\,k_{réf}\,x\sin\varphi$ (sur la plaque en $z = 0$).

Les lignes d'intensité maximale ($\mathbf{\Delta k.OM} = p\,2\,\pi$) sont des droites, l'écart entre deux droites successives vaut $\Delta x = \frac{\lambda_{réf}}{\sin\varphi}$.

- 5- On veut $\Delta x > \frac{1}{N}$, donc $\sin\varphi < N\,\lambda_{réf}$, d'où: $\varphi < 14{,}5$ ° (0,25 rad)

- 6- $I(M) = I_0\,(1 + m\cos(2\pi x/\Delta x))$, donc: $t(x,y,0) = t_0\,\{1 + m\cos(2\pi x/\Delta x)\}^{-\gamma/2}$ avec $m = 2\,\varepsilon$, d'où:

$t(x,y,0) = t_0\,\{1 - \gamma\,\varepsilon\cos(2\pi x/\Delta x)\}$ au premier ordre en ε.

- 7- $s(\mathbf{u_d}) = s_0(\mathbf{u_d})\iint_M t_0\,\{1 - \gamma\,\varepsilon\cos(2\pi x/\Delta x)\}\exp(i(\omega t - (\mathbf{k_{lect} - k).OM})\,\mathrm{d}S$, avec

$\mathbf{(k_{lect} - k).OM} = k_{réf}\,x\sin\theta - k_{réf}\,x\,\alpha_d - k_{réf}\,y\,\beta_d$ et $s_0(\mathbf{u_d}) = A_{lec}\exp(i(\omega t - \mathbf{(k - k_{lec}).OM})$. En remplaçant encore le cosinus par la demi somme d'exponentielles, on trouve:

$\underline{a}_{d1} = t_0\, s_0(\mathbf{u_d})\, a\, h\, \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi\, \beta_d\, h}{\lambda_{\text{ré f}}}\right)\, \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi\, a}{\lambda_{\text{ré f}}}(\alpha_{\mathrm{d}} - \sin\theta)\right)$

$\underline{a}_{d2} = t_0\, s_0(\mathbf{u_d})\, \dfrac{1}{2}\, \gamma\, \varepsilon\, a\, h\, \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi\, \beta_d\, h}{\lambda_{\text{ré f}}}\right)\, \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi\, a}{\lambda_{\text{ré f}}}(\alpha_{\mathrm{d}} - \sin\theta + \sin\varphi)\right)$

$\underline{a}_{d2} = t_0\, s_0(\mathbf{u_d})\, \dfrac{1}{2}\, \gamma\, \varepsilon\, a\, h\, \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi\, \beta_d\, h}{\lambda_{\text{ré f}}}\right)\, \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi\, a}{\lambda_{\text{ré f}}}(\alpha_{\mathrm{d}} - \sin\theta - \sin\varphi)\right).$

❑ 8- $\underline{a}_{d1}$ (donc I_1) est maximal pour $\beta_{\mathrm{d}} = 0$ et $\alpha_{d1} = \sin\theta_{\mathrm{d}} = \sin\theta$ c'est l'ordre 0.

$\underline{a}_{d2}$ (donc I_2) est maximal pour $\beta_{\mathrm{d}} = 0$ et $\alpha_{d2} = \sin\theta_{\mathrm{d}} = \sin\theta - \sin\varphi$ c'est l'ordre - 1.

$\underline{a}_{d3}$ (donc I_3) est maximal pour $\beta_{\mathrm{d}} = 0$ et $\alpha_{d3} = \sin\theta_{\mathrm{d}} = \sin\theta + \sin\varphi$ c'est l'ordre + 1.

❑ 9- Pour des petits angles: selon l'axe y, nous avons $\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi\, \beta_d\, h}{\lambda_{\text{ré f}}}\right)$, dont la demi-largeur est donnée par $\dfrac{\pi\, \beta_d\, h}{\lambda_{\text{ré f}}} = \pi$, donc $\beta_{\mathrm{d}} = \dfrac{\lambda_{\text{ré f}}}{h}$, avec une amplitude maximale $t_0\, a\, h$.

selon l'axe x, $\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi\, a}{\lambda_{\text{ré f}}}(\alpha_{\mathrm{d}} - \sin\theta)\right) \approx \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi\, a}{\lambda_{\text{ré f}}}(\theta_{\mathrm{d}} - \theta)\right)$ dont la demi-largeur est $\dfrac{\lambda_{\text{ré f}}}{a}$.

L'amplitude maximale du pic central est $t_0\, a\, h$, celle des pics secondaires est $\dfrac{1}{2}\, t_0\, a\, h\, \gamma\, \varepsilon$.

La valeur relative des pics secondaires, en intensité, est donc $\left(\dfrac{1}{2}\gamma\, \varepsilon\right)^2 = \left(\dfrac{1}{4}\gamma\, m\right)^2$.

❑ 10- La distance entre deux pics est φ, leur largeur angulaire est $2\, \dfrac{\lambda_{\text{ré f}}}{a}$. On veut $\varphi >> 2\, \dfrac{\lambda_{\text{ré f}}}{a}$.

Dans ce cas, les pics sont bien séparés et on peut ajouter les 3 intensités (les doubles produits sont très petits):

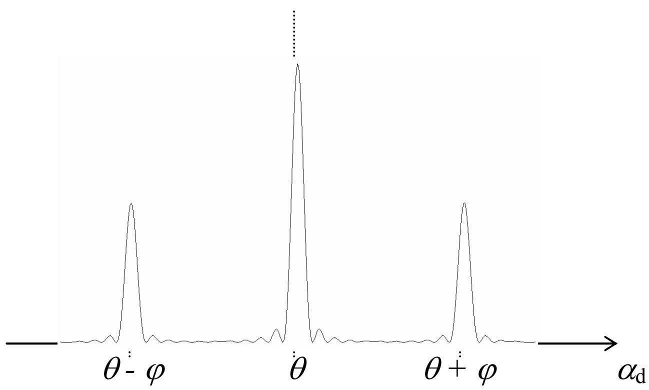
$I(\mathrm{M}) = \underline{s}.\underline{s}^* = (\underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \underline{s}_3).\,(\underline{s}_1^* + \underline{s}_2^* + \underline{s}_3^*) \approx \underline{s}_1.\underline{s}_1^* + \underline{s}_1.\underline{s}_1^* + \underline{s}_2.\underline{s}_2^* + \underline{s}_3.\underline{s}_3^* = I_1 + I_2 + I_3.$

$I(M) \approx I_0 \ldots$

$$\ldots\left[\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda_{\text{ré f}}}(\alpha_{\mathrm{d}} - \theta)\right) + \left(\frac{\gamma\, m}{4}\right)^2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda_{\text{ré f}}}(\alpha_{\mathrm{d}} - \theta - \varphi)\right) + \left(\frac{\gamma\, m}{4}\right)^2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\, a}{\lambda_{\text{ré f}}}(\alpha_d - \theta + \varphi)\right)\right] \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi\, h}{\lambda_{\text{ré f}}}\beta_{\mathrm{d}}\right)$$

avec $I_0 = t_0^2\, a^2\, h^2\, A_{\mathrm{lec}}^2$.

Le graphe ci-contre représente l'allure de I en fonction de α_{d}.



❑ 11- Pour $\theta = \varphi$:

$\underline{s}_0 \propto \mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi a}{\lambda_{\text{ré f}}}(\alpha_{\mathrm{d}} - \varphi)\right)$

$\underline{s}_{-1} \propto \dfrac{\gamma\varepsilon}{2}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi a}{\lambda_{\text{ré f}}}\alpha_{\mathrm{d}}\right)$

$\underline{s}_1 \propto \dfrac{\gamma\, \varepsilon}{2}\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\pi a}{\lambda_{\text{ré f}}}(\alpha_{\mathrm{d}} - 2\, \varphi)\right)$

Le terme $\underline{s}_{-1}$, proportionnel à ε, lui même proportionnel à A_{obj}, reconstitue l'image de l'objet dans la direction $\alpha_{\text{d}} = 0$. De même, le terme $\underline{s}_1$, reconstitue l'image de l'objet dans la direction $\alpha_{\text{d}} = 2\varphi$.

Si θ varie, l'image est vue dans la direction $\theta - \varphi$ ou $\theta + \varphi$: elle varie comme θ.

- 12- La reconstruction est acceptable si $\left(\frac{\gamma\, m}{4}\right)^2 f > \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda_{\text{réf}}}(0-\varphi)\right)$

donc si $\left(\frac{\pi a}{\lambda_{\text{réf}}}\varphi\right)^{-2} < \left(\frac{\gamma\, m}{4}\right)^2 f$ soit: $\varphi > \frac{\lambda_{\text{réf}}}{\pi\, a}\frac{4}{\gamma\, m}\frac{1}{\sqrt{f}}$. On trouve $\varphi > \frac{500.10^{-9}.4}{\pi.10^{-2}.10^{-3}.\sqrt{0.1}}$,

d'où $\varphi > 0{,}20$ rad (11,5 °).

- 13- $\delta(\text{M}) = (n(\text{M}) - 1)\, e = (n_0 - 1)\, e + \alpha\, e\, I(\text{M})$.

- 14- $\underline{t}(\text{M}) = \exp\left(-i\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}e\left(n_0 - 1 + \alpha\, I(M)\right)\right)\right) \approx \exp\left(-i\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}e\left(n_0 - 1\right)\right)\right)\left(1 - i\frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}e\,\alpha\, I(M)\right)$, de la forme

  $\underline{t}_0\,(1 + \underline{C}\, I(\text{M}))$, avec $\underline{t}_0 = \exp\left(-i\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}e\left(n_0 - 1\right)\right)\right)$ et $\underline{C} = -i\frac{2\pi}{\lambda_{\text{réf}}}e\,\alpha\, I(M)$.

$\underline{t}(\text{M}) = \underline{t}_0\,(1 + \underline{C}\, I_0 \cos(2\,\pi\, x/\Delta x)) = \underline{t}_0\,(1 + \underline{C}\, I_0)\left(1 + \frac{\underline{C}I_0}{1+\underline{C}\,I_0}m\cos\left(2\,\pi x / \Delta x\right)\right)$.

Le calcul est identique au précédent en remplaçant $\underline{t}_0$ par $\underline{t}_0\,(1 + \underline{C}\, I_0)$ et $\gamma\,\varepsilon$ par $\frac{\underline{C}I_0}{1+\underline{C}\,I_0}$.

Comme les intégrales conduisent à des sinc réels, l'intensité conduira à $|\underline{t}_0\,(1 + \underline{C}\, I_0)|^2$ pour la tache centrale et le rapport des intensités entre les taches extérieures et la tache centrale vaudra $\left|\frac{\underline{C}I_0}{1+\underline{C}\,I_0}\right|^2$.

La géométrie est contenue dans les sinc.

- 15- $\mathbf{OM.k_1} = k_{\text{réf}}\, x \sin\varphi_1 = k_{\text{réf}}\, x\, \varphi_1$, $\mathbf{OM.k_2} = k_{\text{réf}}\, x \sin\varphi_2 = k_{\text{réf}}\, x\, \varphi_2$.

$\underline{t}(\text{M}) = \underline{t}_0\,(1 + 2\,\underline{C}\, I_0)\left(1 + \frac{\underline{C}\, I_0}{1 + 2\,\underline{C}\, I_0}\left(m_1 \cos\left(k_{\text{réf}} x\, \varphi_1\right) + m_2 \cos\left(k_{\text{réf}} x\, \varphi_2\right)\right)\right)$

Le même calcul que précédemment conduira à une tache centrale (ordre 0) en $\alpha_{\text{d}} = \theta$, de demi-largeur $\frac{\lambda_{\text{réf}}}{\text{a}}$ et d'intensité I_0', deux taches à l'ordre 1 et - 1, en $\theta - \varphi_1$ et $\theta + \varphi_1$, d'intensité $I_0'\, m_1^2 \left|\frac{\underline{C}I_0}{1+2\,\underline{C}\,I_0}\right|^2$, deux taches (ordre -1' et +1'), en $\theta - \varphi_2$ et $\theta + \varphi_2$, d'intensité $I_0'\, m_2^2 \left|\frac{\underline{C}I_0}{1+2\,\underline{C}\,I_0}\right|^2$.

L'image 1 est reconstituée en $\theta \pm \varphi_1$, l'image 2 est reconstituée en $\theta \pm \varphi_2$, grâce aux termes m_1 et m_2.

- 16- Il n'y a pas de recouvrement si la largeur d'une tache est plus petite que l'écart entre deux taches, donc:

$2\,\frac{\lambda_{\text{réf}}}{\text{a}} < |\varphi_2 - \varphi_1|$, donc $(\Delta\varphi)_{\min} = 2\,\frac{\lambda_{\text{réf}}}{\text{a}}$.

Partie II: Stockage d'hologrammes

❑ 17- $\mu\, c\, S\, \mathrm{d}x\, \dfrac{\partial T}{\partial t}\, \mathrm{d}t = (j(x,t) - j(x+\mathrm{d}x))\mathrm{d}t + \beta\, I(x)\, S\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$, avec $j(x,t) = -\lambda_c \dfrac{\partial T}{\partial x}$, d'où la relation demandée:

$\mu\, c\, \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda_c \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta\, I(x)$.

❑ 18- On remplace $T(x,t)$ par son expression:

$(\mu\, c\, \dfrac{\mathrm{d}\, T_m(t)}{\mathrm{d}\, t} - \beta\, I_0) + (\mu\, c\, \dfrac{\mathrm{d}\, \Delta T(t)}{\mathrm{d}\, t} + \lambda_c\, k^2\, \Delta T(t) - \beta\, I_0\, m) \cos(k\, x) = 0$, valable pour tout x, donc:

$\mu\, c\, \dfrac{\mathrm{d}\, T_m(t)}{\mathrm{d}\, t} - \beta\, I_0 = 0$, soit: $T_m(t) = \dfrac{\beta\, I_0}{\mu c}\, t + T_0$: la valeur moyenne spatiale est croissante dans le temps,

$\mu\, c\, \dfrac{\mathrm{d}\, \Delta T(t)}{\mathrm{d}\, t} + \lambda_c\, k^2\, \Delta T(t) - \beta\, I_0\, m = 0$, on pose $\tau = \dfrac{\mu\, c}{\lambda_c\, k^2}$, alors: $\Delta T = A \exp(-\, t\, /\, \tau) + \dfrac{\beta\, I_0\, m}{\lambda_c\, k^2}$, d'où:

$\Delta T = \dfrac{\beta\, I_0\, m}{\lambda_c\, k^2}\, (1 - \exp(-\, t\, /\, \tau))$: l'amplitude de la modulation de T autour de T_m croît au cours du temps jusqu'à la valeur maximale $\dfrac{\beta\, I_0\, m}{\lambda_c\, k^2}$.

On n'a pas tenu compte des transferts conducto-convectifs à travers la surface latérale. On pourrait aussi tenir compte des phénomènes non linéaires (la loi de Fourier est écrite au premier ordre). Les caractéristiques du milieu sont indépendantes de T alors que n en dépend.

❑ 19- $n(x,t) = n_0 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\, n}{\mathrm{d}\, t}\right)_{T=T_0} \left(\dfrac{\beta\, I_0}{\mu c}\, t + \dfrac{\beta\, I_0\, m}{\lambda_c\, k^2}\, (1 - \exp(-\, t\, /\, \tau)) \cos(k\, x)\right)$, ce qui donne:

$n(t) = n_0 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\, n}{\mathrm{d}\, t}\right)_{T=T_0} \dfrac{\beta\, I_0}{\mu c}\, t$ et $\Delta n(t) = \dfrac{\beta\, I_0\, m}{\lambda_c\, k^2} \left(\dfrac{\mathrm{d}\, n}{\mathrm{d}\, t}\right)_{T=T_0} (1 - \exp(-\, t\, /\, \tau)$. La durée caractéristique de l'évolution de $\Delta n(t)$ est donc $\tau_0 = \tau = \dfrac{\mu\, c}{\lambda_c\, k^2}$.

❑ 20- Pour $t > \Delta t$, $I(x) = 0$, alors: $\mu\, c\, \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda_c \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, avec $T(x,t) = T_m(\Delta t) + \Delta T(\Delta t) \cos(k\, x)$.

On cherche toujours T sous la forme: $T(x,t) = T_m(t) + \Delta T(t) \cos(k\, x)$, il vient alors:

$\mu\, c\, \dfrac{\mathrm{d}\, T_m}{\mathrm{d}\, t} = 0$, donc: $T_m(t) = \text{cste} = T_m(\Delta t) = \dfrac{\beta\, I_0}{\mu c}\, \Delta t + T_0$.

$\mu\, c\, \dfrac{\mathrm{d}\, \Delta T}{\mathrm{d}\, t} + k^2\, \lambda_c\, \Delta T(t) = 0$, donc: $\Delta T(t) = B \exp(-\, t\, /\, \tau_0)$, avec: $\Delta T(\Delta t) = \dfrac{\beta\, I_0\, m}{\lambda_c\, k^2}\, (1 - \exp(\Delta t\, /\, \tau_0))$, ce qui donne:

$T(x,t) = \dfrac{\beta\, I_0}{\mu c}\, \Delta t + T_0 + \dfrac{\beta\, I_0\, m}{\lambda_c\, k^2}\, (\exp(\Delta t\, /\, \tau_0) - 1) \exp(-\, t\, /\, \tau_0) \cos(k\, x)$.

L'indice vaut: $n(T) = n_0 + \left(\dfrac{\mathrm{d}\, n}{\mathrm{d}\, t}\right)_{T=T_0} (T - T_0)$, donc de la forme $n(t) + \Delta n(t) \cos(k\, x)$, avec:

$\Delta n(t) = \left(\dfrac{\mathrm{d}\, n}{\mathrm{d}\, t}\right)_{T=T_0} \dfrac{\beta\, I_0\, m}{\lambda_c\, k^2}\, (\exp(\Delta t\, /\, \tau_0) - 1) \exp(-\, t\, /\, \tau_0)$, pour $t > \Delta t$.

- 21- $\tau_0 = \dfrac{1{,}9.10^6}{\left(\dfrac{2\,\pi}{3.10^6}\right)^2 0{,}17}$, donc: $\tau_0 = 2{,}55.10^{-6}$ s.

$\beta I_0 = \dfrac{E_0 \,/\, \Delta T}{V} = \dfrac{5{,}7.10^{-5}}{10.10^{-9}\left(0{,}8.10^{-6}.3.10^{-3}\right)}$, donc: $\beta I_0 = 2{,}38.10^{12}$ W.m^{-3}.

$\Delta t \,/\, \tau_0 \approx 4.10^{-3} << 1$, donc $\Delta n(\Delta t) \approx \left(\dfrac{\mathrm{d}\,n}{\mathrm{d}\,t}\right)_{T=T_0} \dfrac{\beta I_0\, m}{\lambda_c\, k^2} = -3.10^{-4}\, \dfrac{2{,}38.10^{12}.1}{\left(\dfrac{2\,\pi}{3.10^{-6}}\right)^2 .0{,}17}$, donc: $\Delta n(\Delta t) = -\,1{,}15.10^{-3}$ s.

- 22- L'information disparaît trop vite, on préfèrerait des hologrammes qui durent plusieurs heures, voire plusieurs jours, semaines,…