

CHAUFFAGE PAR MICRO-ONDES (Mines-Ponts PC 05)

Remarque : le problème est un peu dérivant par les termes employés, qui ne sont pas ceux habituellement utilisés dans les classes préparatoires :

- K (au lieu de λ) pour la conductivité thermique.
- loi de Newton donnée avec g appelé coefficient d'échange thermique (au lieu de h , souvent nommé coefficient de transfert conducto-convectif).
- j_m est nommé flux thermique, alors qu'il s'agit d'un flux surfacique, généralement nommé densité de courant de chaleur...

Partie III - Transfert Thermique

10°) Validité des hypothèses :

- K , e et p doivent être indépendants de la température. (Cela est assez bien vérifié pour la plupart des matériaux ordinaires. (Ici, le système est essentiellement constitué d'eau.)
- l'énoncé propose un modèle unidimensionnel : il faut donc que l'épaisseur $2e$ soit faible devant \sqrt{S} , pour qu'on puisse négliger les effets de bord (et donc que la conduction thermique suivant \vec{e}_1 et \vec{e}_2 soit négligeable).
- enfin, pour que la valeur maximale du champ électrique soit la même en tout point, il faut que l'échantillon soit petit devant les dimensions du four à micro-ondes utilisé.

11°) On applique le premier principe à une tranche d'épaisseur dx du système (pour une évolution isobare) :

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt = \rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = \delta Q$$

La chaleur échangée correspond au flux par conduction travers des parois en x et $x + dx$, auquel il faut ajouter la puissance fournie au système par le champ électromagnétique :

$$\rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = (j_m(x) - j_m(x + dx)) S dt + P \frac{dx}{2e}$$

Remarque : l'énoncé précise mal si la puissance P est une puissance totale ou une puissance volumique. Il faut la considérer totale pour trouver les expressions demandées à la question suivante.

On en déduit : $\rho c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j_m}{\partial x} S dx + P \frac{dx}{2e} dt$

Puis, avec la loi de Fourier et en simplifiant, on obtient l'équation vérifiée par $T(x, t)$:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{P}{2eS}$$

Au niveau des interfaces, la loi de Newton (donnée par l'énoncé) s'écrit :

$$j_m(-e, t) = -g(T_1(t) - T_0) \quad \text{et} \quad j_m(e, t) = g(T_2(t) - T_0)$$

Remarque : le signe - dans la première expression vient de ce que j_m est la composante selon \vec{u}_x du vecteur densité de flux de chaleur. En $x = -e$, il correspond donc à un flux entrant dans le matériau, alors que le Φ_S de l'énoncé correspond à une puissance sortante.

12°) En régime permanent $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, on a donc à résoudre : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{P}{2eKS}$

qui s'intègre en : $T = -\frac{P}{4eKS} x^2 + Ax + B$

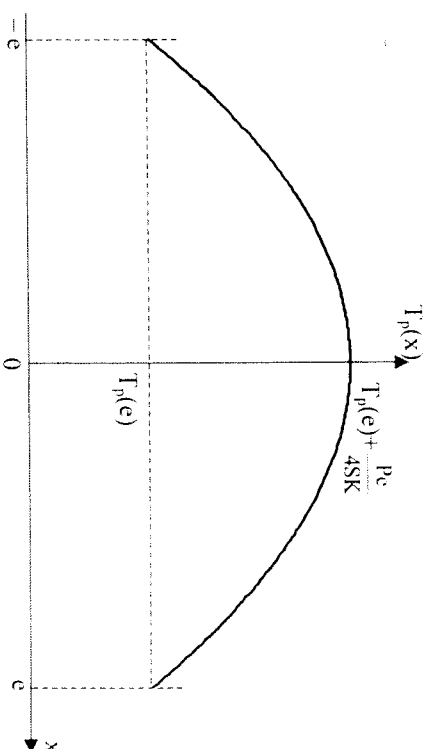
Pour trouver les constantes d'intégration, on utilise les conditions aux limites en e et $-e$:

$$\begin{cases} T_p(e) = -\frac{P}{4eKS} e^2 + Ae + B \\ T_p(-e) = T_p(e) = -\frac{P}{4eKS} e^2 - Ae + B \end{cases} \quad \text{d'où :} \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = T_p(e) + \frac{P}{4eKS} e^2 \end{cases}$$

D'où le profil de température :

$$T_p(x) = \frac{P}{4eKS} (e^2 - x^2) + T_p(e)$$

qui donne le profil parabolique représenté ci-contre :



● On a donc au milieu de l'échantillon : $T_p(0) = T_p(e) + \frac{Pe}{4KS}$

Par ailleurs : $j_m(e) = -K \frac{\partial T}{\partial x}(e) = -K \left(\frac{P}{4eKS} (-2e) \right) = \frac{P}{2S}$

Remarque : ce résultat est absolument évident, puisque toute la puissance thermique dissipée dans le matériau doit s'évacuer par les deux faces $x = \pm e$; ce qui s'écrit : $P = 2S j_m(e)$

Avec la loi de Newton, on a donc : $j_m(e) = \frac{P}{2S} = g [T_p(e) - T_0]$

D'où : $T_p(e) = T_0 + \frac{P}{2gS}$ et $T_p(0) = T_p(e) + \frac{Pe}{4KS} = T_0 + \frac{Pe}{2gS} \left(1 + \frac{gS}{2K} \right)$

13°) On a initialement $T(t=0) = T_0$ dans tous le matériau, d'où : $f(0) = 1$

De même, on a lorsque t devient grand le régime permanent, avec : $T(t \rightarrow \infty) = T_p(x)$, ce qui signifie que :

$$f(t \rightarrow \infty) = 0$$

14°) En injectant la forme proposée pour $T(x,t)$ dans l'équation établie à la question 11, il vient :

$$-pc f'(t) [T_p(x) - T_0] = K \frac{\partial^2 T_p(x)}{\partial x^2} [1 - f(t)] + \frac{P}{2eS}$$

En utilisant l'expression de $T_p(x)$ obtenue à la question 12, cela devient :

$$-pc f'(t) \left[\frac{P}{4eKS} (e^2 - x^2) + \frac{P}{2gS} \right] = K \left(-\frac{P}{2eKS} \right) [1 - f(t)] + \frac{P}{2eS}$$

D'où :

$$\frac{f(t)}{f'(t)} = \frac{2eS}{pc \left(\frac{P}{2gS} + P(e^2 - x^2) \right)} = \frac{2K}{pc \left(\frac{2eK}{g} + (e^2 - x^2) \right)} = \varphi(x)$$

Les variables t et x étant indépendantes, la solution proposée n'est valable que si $\varphi(x) = Cte$. C'est à peu près le cas si, pour tout x compris entre $-e$ et e , on peut négliger $e^2 - x^2$ devant $2eK/g$. Il faut donc :

$$(e^2 - x^2) < e^2 \ll \frac{2eK}{g} \quad \text{soit encore :} \quad \boxed{ge \ll 2K}$$

Si cette condition est vérifiée, alors :

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{g}{pce}$$

l'équation qui se résout en : $f(t) = A \exp\left(-\frac{t}{t_s}\right)$ avec la constante de temps $t_s = \frac{pce}{g}$

Comme on a vu que $f(0) = 1$, il vient finalement :

$$\boxed{f(t) = \exp\left(-\frac{t}{t_s}\right)}$$

15°) Application Numérique :

$$t_s = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{10} = 2 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$T_p(0) = 293 + \frac{500}{2 \cdot 10^2 \cdot 10} (1 + 0,05) = 2918 \text{ K}$$

Remarque : on peut aussi calculer $ge = 5 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ et $2K = 1 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, et vérifier ainsi que $ge \ll 2K$, approximation nécessaire à la résolution faite ici.

16°) Le chauffage se faisant à la pression atmosphérique, l'apparition des premières bulles de vapeur se produit dès que la température atteint : $T_{\text{vap}}(P_0) = 373 \text{ K}$.

La température étant maximale en $x=0$, il faut résoudre : $T(0, t_p) = 373 \text{ K}$, soit :

$$T_{\text{vap}}(P_0) = T_0 + (T_p(0) - T_0) \left(1 - \exp\left(-\frac{t_p}{t_s}\right) \right) = T_0 + \frac{Pc}{2Sg} \left(1 + \frac{ge}{2K} \right) \left(1 - \exp\left(-\frac{t_p}{t_s}\right) \right)$$

Cela donne numériquement :

$$373 = 293 + (2918 - 293) \left(1 - \exp\left(-\frac{t_p}{t_s}\right) \right)$$

soit encore : $80 = 2625 \left(1 - \exp\left(-\frac{t_p}{t_s}\right) \right)$

D'où : $t_p = -t_s \ln\left(1 - \frac{80}{2625} \right) \approx 62 \text{ s}$

À cette date, la température de surface est :

$$T(e, t_p) = T_0 + (T_p(e) - T_0) \left(1 - \exp\left(-\frac{t_p}{t_s}\right) \right) = T_0 + \frac{P}{2gS} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_p}{t_s}\right) \right)$$

ou encore : $T(e, t_p) = T_0 + \frac{P}{2gS} \frac{T_{\text{vap}}(P_0) - T_0}{T_p(0) - T_0}$

A.N. : $\frac{T(e, t_p)}{T_0} = 293 + \frac{500}{2 \cdot 10^2 \cdot 10^2} \frac{80}{2625} = 369 \text{ K}$

17°) L'expulsion se termine lorsque tous les pores sont occupés par de la vapeur d'eau, donc lorsque celle-ci occupe un volume $V_f/2$. La vapeur étant assimilée à un gaz parfait, on a :

$$\frac{P V_f}{2} = \frac{m}{M} RT \quad \text{d'où} \quad \boxed{m = \frac{PV_f M}{2RT}}$$

A.N. : $m = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ kg} = 29 \text{ mg}$

18°) Si on suppose que toute la puissance fournie sert à vaporiser l'eau (le reste du matériau et l'eau liquide restent à 100°C), alors on a :

$$P \cdot t_x = ml_v \Rightarrow \boxed{t_x = \frac{ml_v}{P}}$$

A.N. : $t_x = 0,13 \text{ s}$

La durée réelle est sûrement beaucoup plus grand car la modélisation est peut-être trop simpliste. En effet, la température n'est probablement pas uniforme à la valeur de 100°C. D'autre part, l'expulsion de la vapeur n'est pas instantanée, ce qui fait que la pression peu varier à l'intérieur de la roche. Si la pression est plus importante que la pression atmosphérique, cela peut provoquer un échauffement de la vapeur et du matériau poreux...

*
*