

## A 99 PHYS. I

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,  
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,  
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)  
CONCOURS D'ADMISSION 1999

### PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

#### Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

#### Sujet mis à disposition du concours ENTPE

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

#### PHYSIQUE I - PSI

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 6 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives, ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : vecteur :  $\mathbf{V}$  (gras) ; norme du vecteur  $\mathbf{V}$  :  $V$  (italique) ; vecteur unitaire :  $\hat{\mathbf{v}}$ .

## INVESTIGATIONS D'UN PHYSICIEN PRÉOCCUPÉ

### Premier problème : chute d'une tartine beurrée (mécanique du solide)

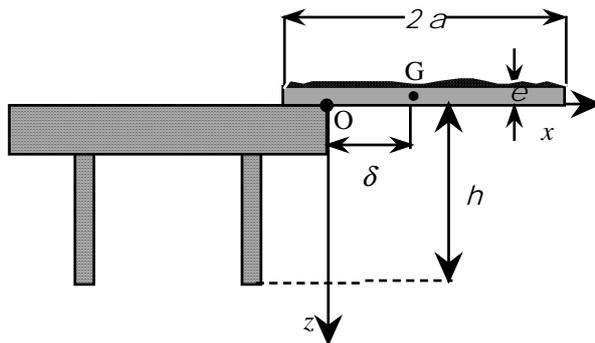


Fig. 1 : tartine (de grande taille !) sur table

Préoccupé dès le petit-déjeuner par un problème résistant à sa sagacité, un physicien pose distraitement sa tartine beurrée en déséquilibre au bord de la table, côté beurré vers le haut (fig. 1). La tartine tombe et atterrit sur le côté beurré, ce qui ne manque pas d'attirer l'attention du physicien. Répétant l'expérience avec méthode et circonspection, notre héros observe la répétitivité du phénomène et le modélise. Nous allons lui emboîter le pas.

#### Pivotement de la tartine

Une tartine rectangulaire de longueur  $2a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur  $e$ , de masse  $m$  uniformément répartie, est placée au bord d'une table de hauteur  $h$ . Le mouvement est décrit dans le repère  $R(O, x, y, z)$ ,

direct et supposé galiléen : O est sur le bord de la table, l'axe Ox est horizontal dirigé vers l'extérieur de la table ; l'axe Oy est porté par le rebord de la table et l'axe Oz, vertical, est dirigé vers le bas ; les petits côtés de la tartine sont parallèles à Oy.

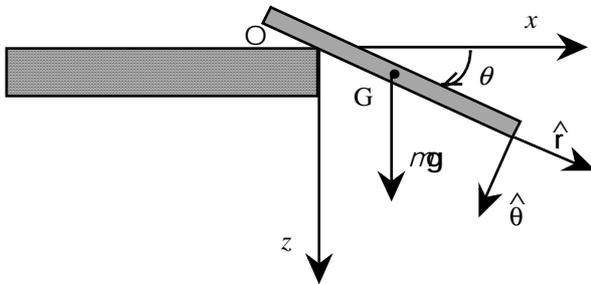
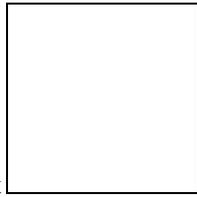


Fig. 2 : chute d'une tartine

À l'instant initial, la tartine, supposée d'épaisseur nulle, est horizontale, sa vitesse est nulle. Les coordonnées de son centre de masse G sont  $(\delta, 0, 0)$ . La tartine amorce une rotation *sans glissement* autour de l'arête Oy du bord de la table. À l'instant  $t$ , la tartine est repérée par l'angle  $\theta$  de la figure 2. La vitesse angulaire est notée  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ . Le

moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe Gy, parallèle à Oy et passant par G, est  $J_{Gy} = \frac{1}{3} m a^2$  et



par rapport à l'axe Oy il est

□ 1 – En introduisant les réactions tangentielle et normale de la table en O, notées respectivement  $T$  et  $N$  dans la base  $(\hat{r}, \hat{\theta})$  représentée sur la fig. 2, exprimer le théorème du mouvement du centre de masse, dans le repère galiléen  $R(O, x, y, z)$ , en projection sur la base mobile  $(\hat{r}, \hat{\theta})$  ; on notera  $g$  l'intensité de l'accélération de la pesanteur.

□ 2 – Exprimer le théorème du moment cinétique pour la tartine, en projection sur l'axe Oy. Le *coefficient de surplomb* étant défini par  $\eta = \frac{\delta}{a}$  (la distance  $\delta$  est appelée *distance de surplomb*), en déduire la relation (qui définit, au passage, la vitesse angulaire  $\omega_0$ ) :

$$\omega^2 = \frac{g}{a} \frac{6\eta}{1+3\eta^2} \sin \theta = \omega_0^2 \sin \theta \quad (A)$$

□ 3 – Retrouver la relation (A) par des considérations énergétiques.

□ 4 – La tartine quitte la table à un instant pris comme origine des temps, l'angle  $\theta$  vaut alors  $\frac{\pi}{2}$ , la vitesse angulaire initiale est ainsi  $\omega_0$ . Quelle est la loi d'évolution ultérieure de l'angle  $\theta$  (on suppose, bien entendu, que le mouvement reste plan et qu'il n'y a pas de contact ultérieur avec la table) ?

□ 5 – On considère que, lorsque la tartine atteint le sol, à l'instant  $\tau$ , elle ne subit pas de rebond et que toute son énergie cinétique devient négligeable. Quel est l'angle limite  $\theta_1$  tel que la tartine atterrisse côté pain, en admettant qu'elle fasse moins d'un tour avant de toucher le sol ?

□ 6 – On suppose  $\eta \ll 1$  ( $\delta \ll a$ ) ; montrer que la durée de chute libre (cette dernière commençant lorsque l'extrémité de la tartine est en O) est  $\tau = \sqrt{2 \frac{(h-2a)}{g}}$ . Calculer  $\tau$  pour  $2a = 10 \text{ cm}$ ,  $h = 75 \text{ cm}$  et  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ . Quelle est la chance de rattraper la tartine avant qu'elle n'atteigne le sol ?

□ 7 – Quelle est la valeur minimale  $\eta_{\min}$  de  $\eta$  permettant à la tartine d'atterrir côté pain ? On pourra poser  $\alpha = \frac{\pi^2}{12 \left( \frac{h}{a} - 2 \right)}$ . Dans les circonstances courantes, le coefficient de surplomb  $\eta$  ne dépasse guère

0,02. Qu'en déduit-on sur la chute de la tartine ?

□ 8 – Comment les considérations précédentes seraient-elles modifiées sur la planète Mars, où le champ de pesanteur vaut  $g_{\text{Mars}} = 3,7 \text{ m.s}^{-2}$  ?

□ 9 – Il est raisonnable de penser que la hauteur d'un éventuel organisme humanoïde marchant sur deux jambes est conditionnée par la valeur du champ de pesanteur de la planète où il vit (par exemple, la hauteur maximale serait celle au-delà de laquelle une chute sur la tête serait certainement mortelle). Sous l'hypothèse que cet humanoïde aurait la même constitution que les Terriens (même résistance de la boîte crânienne, par exemple), quel serait l'ordre de grandeur de sa taille ? Un martien vérifierait-il lui aussi, sous les mêmes hypothèses, que sa tartine beurrée tombe presque toujours sur le côté tartiné ?

□ 10 – L'hypothèse de rotation complète sans glissement jusqu'à  $\theta = \frac{\pi}{2}$  peut certainement être mise en question. Comment le glissement affecte-t-il le temps de chute ? La possibilité de voir atterrir la tartine du bon côté (c'est-à-dire, conventionnellement, le côté non beurré) s'en trouve-t-elle augmentée ou diminuée ?

### FIN DE CE PROBLÈME

### Deuxième problème : le petit halo (optique géométrique)

Les *cirrus* sont des nuages peu épais, à structure filamenteuse, composés de petits cristaux de glace en forme de bâtonnets cylindriques de section principale hexagonale régulière (fig. 3a). Les plus petits de ces cristaux (par exemple de taille inférieure à 20 micromètres) sont le siège d'un mouvement erratique provoqué par le choc des molécules d'air sur eux ; de la sorte, ils ont toutes les orientations possibles dans l'espace. Le physicien de la première partie est préoccupé par des phénomènes optiques associés à ces cristaux. L'indice de la glace,  $n$ , est pris, dans tout le spectre visible, numériquement égal à 1,31.

□ 1 – Montrer qu'un rayon lumineux entrant sous incidence quelconque sur une face d'un prisme d'angle au sommet  $\hat{A} > 100^\circ$  et d'indice  $n = 1,31$  ne peut pas émerger de l'autre face du prisme délimitant l'angle  $\hat{A}$ .

Soit l'hexagone régulier ABCDEF de la figure 3b. On considère la réfraction simple de rayons incidents d'incidence variable, appartenant à un plan de section principale entre A et B (on ne tient pas compte de la réflexion interne).

□ 2 – Les rayons sortant par la face DE sont-ils déviés ? Peut-il y avoir émergence par la face BC ?

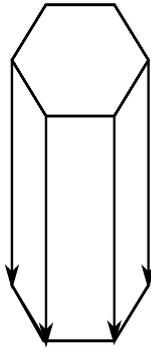


Fig. 3 a

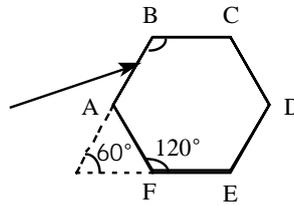


Fig. 3 b

□ 3 – Vérifier que le rayon entrant en AB sous l'incidence  $i$  (fig. 4) et sortant par la face CD présente une déviation  $D$  minimale pour  $i = i'$  (l'angle  $i'$  est défini dans la figure). L'observateur placé dans cette direction observera donc une accumulation de lumière, c'est-à-dire une *surintensité*. Calculer la valeur de

l'angle  $i_0$  correspondant au minimum de déviation et la déviation minimum  $D_m$ .

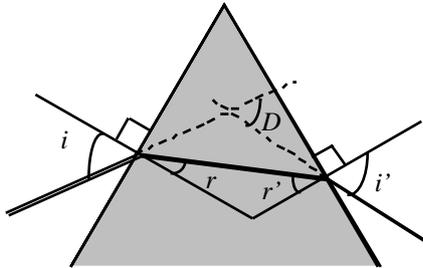


Fig. 4

□ 4 – Le physicien observe autour du Soleil un halo sur voile nuageux ; la photo ci-dessous donne une idée de ce qu'il voit : une couronne brillante autour de l'astre. Le calcul rend-il compte de l'observation ? le diamètre angulaire sous lequel le Soleil est vu de la Terre est de 30 minutes d'arc.



Fig. 5 : Halo sur soleil couchant

□ 5 – En réalité, l'indice optique de la glace décroît avec la longueur d'onde (dispersion dite *normale*). Le halo est-il irisé de rouge ou de bleu à l'intérieur (l'irisation est la production des couleurs de l'arc-en-ciel par décomposition de la lumière) ?

**FIN DE CE PROBLÈME**

**Troisième problème : étude d'un réseau**

Le plan (Oyz) est matérialisé par un réseau infini de fentes de longueur infinie, parallèles à Oz, de largeur négligeable et réparties périodiquement sur l'axe Oy avec une période spatiale  $p$ , appelée *pas du réseau*.

Ce réseau est éclairé à l'incidence normale par une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation  $\omega$

On pose  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ , ce qui définit respectivement la longueur du vecteur d'onde et la longueur d'onde ( $c$  est la célérité de la lumière dans le vide). Les composantes sur les axes Ox, Oy et Oz du champ électrique sont  $\mathbf{E} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ E_0 \exp i(\omega t - kx) \end{cases}$ . On cherche à caractériser des ondes émergentes de la forme

$\mathbf{E}_e = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ E_e \exp i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \end{cases}$ , avec  $\mathbf{r} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$ ; les composantes du vecteur  $\mathbf{q}$  peuvent *a priori* être complexes.

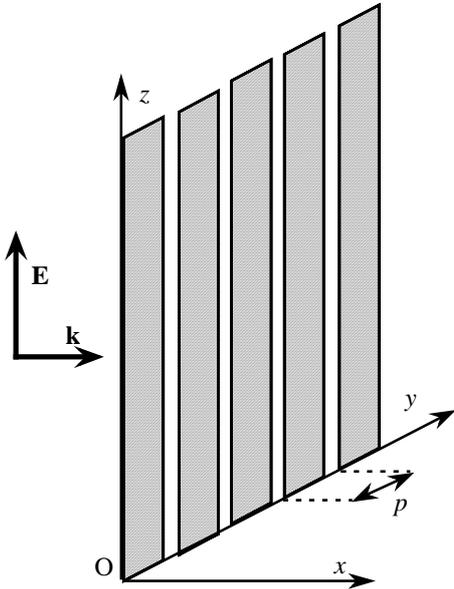


Fig. 6 : quelques éléments d'un réseau illimité

□ 1 – Montrer que les propriétés d'invariance du système {onde incidente, réseau} impliquent les relations  $q_z = 0$  et  $q_y = 2\pi \frac{m}{p}$ , où  $m$  est un nombre entier. Dédurre de l'équation de propagation d'une composante quelconque,  $u$ , du champ électromagnétique  $\left( \Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$  la relation liant  $k$ ,  $q_x$  et  $q_y \left( = 2\pi \frac{m}{p} \right)$ .

□ 2 – Quelle est, en fonction de  $\lambda$  et du pas  $p$ , l'expression de la valeur limite de  $m$  en deçà de laquelle les ondes émergentes sont progressives planes ? caractériser leurs directions de propagation respectives par rapport à celle de l'onde incidente : on établira que les ondes planes émergent du réseau font avec l'axe Ox des angles  $i'$  donnés par  $\sin i' = m \frac{\lambda}{p}$ .

□ 3 – Qu'observerait-on dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale  $f' = 1$  m dans le cas où  $\lambda = 600$  nm et  $p = 2$   $\mu$ m ?

□ 4 – Dans le cas où le réseau comporterait  $N$  fentes de largeur non négligeable  $\ell$  :

4 a – Établir l'expression de l'intensité lumineuse dans la direction faisant un angle  $i'$  avec l'axe Ox, en fonction de  $i'$ ,  $\lambda$ ,  $p$  et  $\ell$ .

Le calcul sera fait dans le cadre de la diffraction à l'infini d'ondes scalaires ; on pourra être conduit à

utiliser la formule sommatoire 
$$\sum_{r=0}^{r=N-1} \exp(in\alpha) = \exp i \frac{(N-1)\alpha}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$
.

4 b – Que deviendrait la figure de diffraction si la largeur des fentes du réseau était portée à  $\ell = 4 \mu\text{m}$  ?

4 c – Décrire la figure de diffraction relative à un réseau de largeur  $L = 6 \text{ cm}$ , de pas  $p = 2 \mu\text{m}$  et avec  $\ell$  négligeable. Comparer au résultat de la question 2.

Dans la suite du problème, on revient au modèle du réseau infini avec  $\ell$  négligeable.

□ 5 – Dans les cas où  $m$  est supérieur à la valeur limite calculée à la question 2, montrer que l'amplitude réelle du champ électrique est  $\mathbf{E}_s = \begin{cases} 0 \\ E_s [\exp(-q_1 x)] \cos(\omega t - q_2 y) \end{cases}$  et expliciter les

expressions de  $q_1$  et de  $q_2$  en fonction de  $m, p$  et  $k$ . Caractériser cette onde rapidement.

□ 6 – Cette onde est-elle observable dans le plan focal image de la lentille ?

□ 7 – Dans quelle mesure, et le cas échéant comment, pourrait-on définir pour l'onde de la question 5 une vitesse de phase et une vitesse de groupe ? Comparer la vitesse de phase à  $c$ .

□ 8 – Déterminer pour l'onde qui se propage de la question 5, le "champ magnétique"  $\mathbf{B}$  (son nom exact est *induction magnétique*) et le vecteur de Poynting  $\Pi$ .

□ 9 – Déterminer et comparer les densités volumiques moyennes (temporelles) d'énergie électrique,  $\rho_e$ , et magnétique,  $\rho_m$ , associées à cette onde.

L'équation de conservation de la charge à l'échelle microscopique se traduit par l'équation dite *équation de continuité*, qui fait intervenir le vecteur densité de courant  $\mathbf{j}$  et la densité volumique de charge  $\rho$ . La conservation de l'énergie dans le vide se traduit par une relation analogue, en remplaçant  $\mathbf{j}$  par le vecteur de Poynting et  $\rho$  par la densité volumique d'énergie électromagnétique ; on peut, pour établir ce point, utiliser l'identité vectorielle

$$\text{div}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot}(\mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot \text{rot}(\mathbf{b}).$$

Toujours par analogie, on appelle vitesse de l'énergie  $\mathbf{V}_e$  le rapport de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting et de la valeur moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique.

□ 10 – Calculer la vitesse de l'énergie de l'onde.

**FIN DE CE PROBLÈME**

**FIN DE L'ÉPREUVE**