MINES PSI 99 - 2^{eme} preuve

Partie I : Effet Meissner

1- $\vec{rot}\vec{B} = \mu_o\vec{j} = \vec{rot}(\vec{rot}\vec{A})$ (en statique) donc λ est homogne une longueur.
2- La plaque est illimite suivant y et z donc invariance du systme par translation selon ces axes, donc $\vec{j}$, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne dpendent ni de y ni de z mais seulement de x. L'quation devient

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2}\vec{X}$$

Solution de la forme : $\vec{X} = \vec{\alpha}e^{x/\lambda} + \vec{\beta}e^{-x/\lambda}$. Par continuit en $x = \pm a$, on trouve

$$\vec{B}(x) = \vec{B}_{ext}\frac{Ch(x/\lambda)}{Ch(a/\lambda)}$$

On en dduit $\vec{j} = \frac{B_{ext}}{\mu_o\lambda}\frac{Sh(x/\lambda)}{Ch(a/\lambda)}\vec{u_z}$ et $\vec{A} = -\lambda B_{ext}\frac{Sh(x/\lambda)}{Ch(a/\lambda)}\vec{u_z}$.

3- $\jmath_{max} = \frac{B_{ext}}{\mu_o\lambda}th(a/\lambda) = 1,6.10^{12}A.m^{-2}$; $B(0) = B_{ext}/Ch(a/\lambda) = 0$.
4- $\Phi = \int\int\vec{B}.d\vec{S} = LI$. Au lieu d'avoir B_{ext} uniforme sur la surface des spires, on a un champ infrieur donc L diminue.
Le thorme d'Ampre donne $B_{ext} = \mu_o nI$ l'extrieur du cylindre supra dans le solnode. B_{ext} est proportionnel I donc la diminution de L aussi.

Partie II : Supraconducteur de type II

5- Invariance par translation suivant y et z donc $\vec{B}$ ne dpend que de x. Le plan Mxy est de symtrie donc $\vec{B}$ est perpendiculaire ce plan. D'o $\vec{B} = B(x)\vec{u_z}$. On applique le thorme d'Ampre sur un rectangle de cts dx et dz :

$x \geq a + b$: B=0.
$a \leq |x| \leq a + b$: $(B(x) - B(x + dx))dz = \mu_o jdxdz$ d'o $B = -\mu_o jx + cste = \mu_o j(|x| - a - b)$ par continuit en $|x| = a + b$
$0 \leq |x| \leq a$: $(B(x) - B(x + dx))dz = 0$ donc B uniforme et $B = B(a) = \mu_o jb$
6- $\vec{B}$ uniforme dans la partie centrale et l'extrieur correspond une densit de courant uniforme d'aprs 5-. On obtient donc, en prenant $\vec{B}_{ext} = B_{ext}\vec{u_z}$ et $\vec{J_c}$ selon $-\vec{u_y}$, pour $a - b \leq |x| \leq a$:

$$B_z(x) = \mu_o J_c(|x| - a) + B_{ext}$$

et la continuit en $x = a - b$ donne $B_{ext} = \mu_o J_c b$ (comme $b < a$, on a toujours $B_{ext} < \mu_o J_c a$.)
7- Si $B_{ext} > \mu_o J_c a$, B ne s'annule pas l'intrieur. On a toujours $B_z(x) = \mu_o J_c(|x| - a) + B_{ext} > 0$
8 Invariance par translation suivant y et z donc E(x). Plan Mxz d'antisymtrie donc $\vec{E}$ est perpendiculaire ce plan. Finalement $\vec{E} = E(x)\vec{u_y}$.
$\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne $\frac{\partial E_y}{\partial x}\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\mu_o \frac{\delta J_c}{\delta t}(|x| - a)$

Pour $x \geq 0$: $E_y = -\mu_o \frac{\delta J_c}{\delta t}(x^2/2 - ax) + cste$

Pour $x \leq 0$: $E_y = -\mu_o \frac{\delta J_c}{\delta t}(-x^2/2 - ax) + cste$

Le plan $x = 0$ est d'antisymtrie donc E(0)=0. Les constantes d'intgration sont nulles. On a finalement :

$\vec{E} = -\mu_o \frac{\delta J_c}{\delta t}(x^2/2 - ax)\vec{u_y}$ si $x \geq 0$

$\vec{E} = -\mu_o \frac{\delta J_c}{\delta t}(-x^2/2 - ax)\vec{u_y}$ si $x \leq 0$

9- Puissance volumique dissipe : $P_v = \vec{J_c}.\vec{E}d\tau$ On prend une tranche 2a.y.z.

Pour la demi-tranche $x \geq 0$: $dP_+ = \vec{J_c}.\vec{E_+}d\tau = \mu_o J_c \frac{\delta J_c}{\delta t}(x^2/2 - ax)dxdydz$

d'o $\delta P_+ = \mu_o J_c \frac{\delta J_c}{\delta t} yz(-a^3/6)$. De mme pour la demi-tranche $x \leq 0$.
D'o $\delta Q = -\mu_o J_c \frac{\delta J_c}{\delta t} a^2/3$ par unit de volume.
10- Pour un volume lmentaire $d\tau$, pendant δt, $dU = \delta Q = c\delta T$.
On peut donc crire $\delta T = \delta T_1 + \delta T_2 = -\frac{\mu_o}{c} J_c \frac{\delta J_c}{\delta t} a^2/3$. Pour que la dissipation d'nergie se rsorbe, il faut $\delta T_2 \leq 0$ si $\delta T_1 \geq 0$, c'est--dire $\frac{\delta T_2}{\delta T_1} < 0$ soit $1 + \frac{\mu_o}{c} J_c \frac{\delta J_c}{\delta t} a^2/3 > 0$. Or on a forcment $\delta J_c < 0$ car δQ dissipe par effet Joule est positive. On obtient donc

$$a < \sqrt{\frac{3c}{\mu_o J_c |\delta J_c/\delta t|}}$$

Si $a > a_c$, le matriau s'chauffe jusqu' T_c o il devient non supraconducteur.
11- $a_c = 77\mu m$
12- Invariance par translation selon z et par rotation autour de Oz donc B indpendant de z et θ. Un plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est de symtrie donc perpendiculaire $\vec{B}$. D'o $\vec{B} = B(r)\vec{u_\theta}$. On applique le thorme d'Ampre sur un cercle de rayon r :

$r < r_s$ $2\pi r B = 0 \rightarrow \vec{B} = \vec{0}$

$r_s < r < R$ $2\pi r B(r) = \mu_o J_c \pi(r^2 - r_s^2) = \mu_o J_c \pi(r^2 - R^2) + \mu_o I \rightarrow \vec{B} = \mu_o(\frac{J_c}{2}(r - \frac{R^2}{r}) + \frac{I}{2\pi r})\vec{u_\theta}$

13- La symtrie cylindrique impose $\vec{E} = E(r)\vec{u_z}$. Donc $\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial r}\vec{u_\theta}$
Pour $r > r_s$, on a $E_z(r) = \frac{\mu_o}{2}\frac{\delta J_c}{\delta t}(r^2/2 - R^2 \ln r) + cste$. En prenant $\vec{E} = \vec{0}$ si $r < r_s$, il faut $E_z(r_s) = 0$ par continuit, d'o

$$\vec{E_z}(r) = \frac{\mu_o}{2}\frac{\delta J_c}{\delta t}(\frac{r^2 - r_s^2}{2} - R^2 \ln \frac{r}{r_s})\vec{u_z}$$

14- Le bilan thermique donne ici $c\delta T = c(\delta T_1 + \delta T_2) = \delta Q_{cp} = \mu_o R^2 J_c \delta J_c f(I/I_c)$. Il y aura stabilit si $\frac{\delta T_2}{\delta T_1} < 0$ soit $\frac{\mu_o R^2}{c} J_c \frac{\delta J_c}{\delta t} f(I/I_c) - 1 < 0$. D'o

$$R < \sqrt{\frac{c}{\mu_o} J_c \frac{\delta J_c}{\delta t} f(I/I_c)}$$

$R_{max} = 45\mu m$
15- Pour que la zone rsistive se rsorbe, il faut que la puissance dissipe par effet Joule soit totalement vacue par conduction :

$$(-j_Q(x = -L/2) + j_Q(x = L/2))S \geq \rho_n J^2 SL$$

avec $-j_Q(x = -L/2) = -k\frac{\partial T}{\partial x} = -k\frac{T_c - T_o}{L}$ et $j_Q(x = L/2) = k\frac{T_c - T_o}{L}$.

On obtient $2k\dfrac{T_c - T_o}{L} \geq \rho_n J^2 L$ donc $L \leq \sqrt{2k\dfrac{T_c - T_o}{\rho_n J^2}}$
$L_{max} = 1,7 \mu m$
16- Pour un volume $d\tau$, $d\vec{F}_{Laplace} = \vec{J} d\tau \wedge \vec{B}$
Travail lmentaire : $\delta W = JBd\tau \vec{u_x}.\Delta x \vec{u_x} = JBd\tau \Delta x$
Premier principe : $dU = c\Delta T d\tau = \delta W + \delta Q$ donc $\Delta T = \dfrac{JB}{c}\Delta x$
17- $\Delta T = 3K$
18- $cdT = \rho J_c^2 dt$ donne $\tau = (\dfrac{dT}{dt})_{trans} = \dfrac{\rho J_c^2}{c} = 3,2.10^8 K.s^{-1}$
19- $[\beta c + (1-\beta)c_{Cu}]dT = [\beta\rho + (1-\beta)\rho_{Cu}]J_c^2 dt$
20- $\tau = 2,95.10^8 K.s^{-1}$
21- -La diode de roue libre permet d'assurer la continuit du courant dans la bobine sans perturber le pont.
- Si une zone devient non supraconductrice, sa rsistance augmente et le pont n'est plus quilibr. La tension n'est plus nulle aux bornes du dtecteur V.
22- Maille de dcharge : $L\dfrac{dI}{dt} + R_d I = 0$. On multiplie par Idt pour faire apparatre l'nergie dissipe par effet Joule dans R_d : $R_d I^2 dt = -\dfrac{d}{dt}(\dfrac{LI^2}{2})$
On intgre de 0 l'infini et on obtient l'nergie totale dissipe : $R_d \int_0^\infty I^2 dt = LI_c^2/2$
23- Au dpart $U_d = R_d I_c = R_d J_c S = 40000V$
24- La diode va-t-elle suporter une telle tension ?
Il faut que R_d soit trs infrieure aux rsistances qui constituent le pont.
La section de R_d doit tre suffisamment importante (c'est le cas).