1. L'équation [1] est tout simplement le PFD appliqué à une particule fluide :

$$\underbrace{\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\vec{v}}_{\text{Equivalent de } m\vec{a} \text{ pour la particule fluide}} \quad = \quad \underbrace{-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P}_{\text{Force volumique de pression}} \quad + \quad \underbrace{\eta\Delta\vec{v}}_{\text{Force volumique de viscosité}}$$

NB :
- le terme $\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\vec{v}$ est la dérivée particulaire de la vitesse.
- l'expression de la force volumique de viscosité n'est valable que pour un fluide incompressible (cette condition est ici assurée par l'équation $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0$.

2. Montrons pour commencer que l'écoulement est incompressible soit div $\vec{v}=0$. L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho\vec{v})=0 \Longleftrightarrow \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho}_{=0 \text{ D'après l'énoncé}}+\rho\,\mathrm{div}\,(\vec{v})=0$$

On trouve donc div $\vec{v}=0$ ce qui signifie que l'écoulement est bien incompressible. Or $\vec{v}=v\underline{Z}$ donc la divergence s'exprime simplement div $\vec{v}=\frac{\partial v}{\partial z}=0$. On trouve donc que $\vec{v}$ est indépendant de z et qu'il ne dépend donc que de r. On peut alors évaluer la dérivée particulaire de $\vec{v}$:

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}=\underbrace{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}_{=0 \text{ car stationnaire}}+\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{v}=v\frac{\partial v}{\partial z}=0$$

On a donc bien montré qu'en stationnaire $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=0$.

3. Projetons l'équation sur les vecteurs unitaires $\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z}$ en cylindrique (le formulaire est utile) :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P=\eta\Delta\vec{v} \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial P}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial P}{\partial z}\end{array}\right. = \eta\left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r\frac{\partial v}{\partial r}}{\partial r}\end{array}\right.$$

On trouve donc que $\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{\partial P}{\partial\theta}=0$ donc P ne dépend que de z. La projection de l'équation suivant Oz donne alors (en n'oubliant pas que v ne dépend que de r) :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}=\eta\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}}{\mathrm{d}r}$$

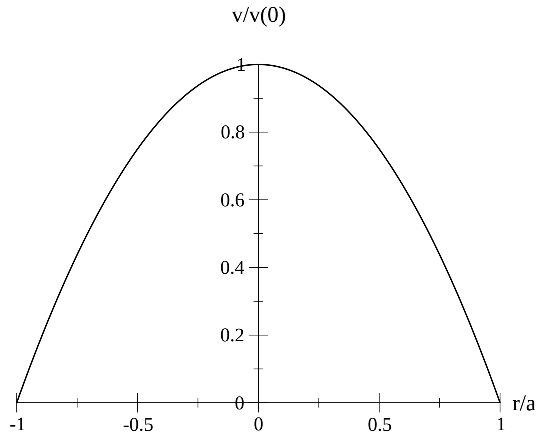
4. Le raisonnement à mener est alors "standard". P ne dépend que de z donc $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$ est également une fonction de z et $\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}}{\mathrm{d}r}$ n'est quant à elle une fonction de r. On a donc une fonction de r qui est égale à une fonction de z, la seule manière d'assurer cette équation est d'avoir les deux fonction qui sont constantes, on a donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}=\mathrm{cste}=K}$.
On a alors :

$$\eta\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}}{\mathrm{d}r}=K \Rightarrow \eta\frac{\mathrm{d}r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}}{\mathrm{d}r}=Kr \Longrightarrow \text{par intégration entre 0 et } r \quad \left[r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]_0^r=K\frac{r^2}{2\eta}$$

On admet ici que v se comporte "gentiment" en 0 *i.e.* que $r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\Big)_{r=0}=0$. En réalité, cette condition est indispensable car sinon on aboutirait à une divergence logarihtmique de v en 0 ce qui est en contradiction

directe avec l'énoncé ...
La première intégration donne donc $r\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = K\dfrac{r^2}{2\eta}$. Reste alors à mener la seconde intégration :

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = K\frac{r^2}{2\eta} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{K}{2\eta}r \Rightarrow \text{par intégration entre } a \text{ et } r \quad [v]_a^r = v(r) - v(a) = \frac{K}{4\eta}(r^2 - a^2)$$



Le fluide étant visqueux, l'existence de la viscosité entraîne que la vitesse au voisinage de la paroi du tuyau est nulle soit $v(a) = 0$. On trouve donc finalement la relation demandée par l'énoncé :

$$v(r) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\frac{r^2 - a^2}{4\eta}$$

5. Par définition, le débit volumique au travers d'une section $\mathcal{S}$ quelconque vaut :

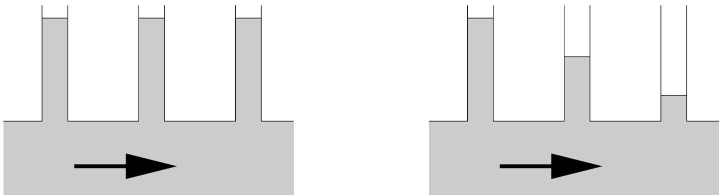
$$Q = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Ici on cherche le débit au travers d'une section à $z = $ cste ce qui assure que $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ sont colinéaires. On peut alors calculer le débit :

$$Q = \iint v\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_0^{2\pi}\int_0^a v(r)\underbrace{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}S} = \int_0^a 2\pi r v(r)\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\frac{2\pi}{4\eta}\left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{2}\right) = -\frac{\pi a^4}{8\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$$

On a donc $K = -\dfrac{\pi a^4}{8\eta}$. Pour avoir un débit positif, il faut que $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} < 0$ ce qui est tout à fait cohérent avec l'intuition physique. Il faut pousser à gauche pour faire avancer de fluide ce qui veut dire que la pression est plus important pour les $z < 0$ ce qui assure $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} < 0$.

6. On a déjà montré que $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \text{cste} = K$, donc on sait que la pression varie linéairement avec z. Par ailleurs, on sait qu'un débit positif entraîne que $K < 0$ ce qui veut dire que la pression décroît linéairement le long de la canalisation, on parle de perte de charge.
Dans le cas du fluide parfait et de l'équation de Bernoulli, à section constante, on a v qui est constante et donc d'après la relation de Benoulli, la pression P est constante également.



Ecoulement parfait Ecoulement de Poiseuille

7. A priori, l'écoulement de Poiseuille est observé lorsque la viscosité joue un rôle important *i.e.* lorsque le nombre de Reynolds est très petit. Une autre solution consista à considérer que la viscosité se fait sentir lorsque le diamètre du tube devient de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite.

8. Plus on va profondément plus la pression augmente (il y a plus de poids au dessus). Les roches sont donc plus compressées et les interstices dans ces roches diminuent, la porosité diminue donc également.

9. Soit V_n le volume de la nacelle est P_n son poids, dans la première configuration, seule la nacelle est présente et subit deux forces donc son poids P_n et la poussée d'Archimède $-V_n\mu_{Hg}g$ (on oriente ici l'axe des z vers le bas, l'équilibre de la balance s'écrit donc :

$$m_1 g = P_n - V_n\mu_{Hg}g$$

Dans la deuxième configuration, on ajoute l'échantillon de masse m et de volume V_T, on subit donc deux force supplémentaires qui sont le poids mg de l'échantillon et la poussée d'Archimède $-V_T\mu_{Hg}$. La deuxième position d'équilibre s'écrit donc :

$$m_2 g = P_n - V_n\mu_{Hg} + mg - V_T\mu_{Hg}g$$

Par différenciation, on trouve donc :

$$(m_2 - m_1)g = mg - V_T\mu_{Hg}g \Longrightarrow \boxed{V_T = \frac{m + m_1 - m_2}{\mu_{Hg}}}$$

Dans la nouvelle série d'expériences, on a les résultats suivants. Pour la première expérience, on a m_1 qui s'équilibre avec l'échantillon soit $m_1 = m$.
Pour la seconde expérience, on a équilibre alors que l'échantillon est plongé dans le mercure, il faut alors rajouter la poussée d'Archimède qui correspond à la résultante des forces de pression hydrostatique sur le solide. On a alors le bilan :

$$m_2 g = mg - V_T\mu_{Hg}g \Longrightarrow \boxed{V_T = \frac{m_1 - m_2}{\mu_{Hg}}}$$

10. Dans l'expérience 1, la masse m_3 équilibre encore une fois la masse de l'échantillon soit :

$$m_3 = m$$

Dans la seconde expérience, le fluide pénètre dans les pores du solide, la masse du solide varie donc et vaut $m + V_P\mu_{Solv}$. Par ailleurs, le solide subit toujours une poussée d'Archimède de la part du fluide soit finalement le bilan :

$$m_4 = m + V_P\mu_{Solv} - V_T\mu_{Solv} \Longrightarrow \boxed{V_S = V_T - V_P = \frac{m_3 - m_4}{\mu_{Solv}}}$$

Le porosité vaut $\phi = \dfrac{V_P}{V_T}$ soit finalement $\dfrac{V_S}{V_T} = 1 - \phi$.
En utilisant la relation 9A et la relation 10, on trouve donc :

$$\phi = 1 - \frac{V_S}{V_T} = 1 - \frac{\mu_{Hg}}{\mu_{Solv}}\frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_1 - m_2}$$

De même, en utilisant la relation 9B et la relation 10, on trouve donc :

$$\phi = 1 - \frac{V_S}{V_T} = 1 - \frac{\mu_{Hg}}{\mu_{Solv}}\frac{m_3 - m_4}{m_1 - m_2}$$

Ici, on a mesuré essentielle le volume de liquide qui a pénétré à l'intérieur des pores, on a donc mesuré ϕ_u.

11.

$$[k] = \frac{[Q][\eta]}{[A][\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}]} = \frac{\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{Pa.s}}{\mathrm{m}^2\,\mathrm{Pa.}\ \mathrm{m}^{-1}} = \ \mathrm{m}^2$$

12. Chaque cylindre peut dans un premier temps être considéré comme un tuyau étudié dans la première partie, on peut alors écrire grâce à la partie I le débit q au travers de ce cylindre :

$$q = -\frac{\pi a^4}{8\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$$

On a N cylindres en parallèle et chacun laisse passer un débit q, on peut donc en déduire le débit Q que laisse passer la roche comme :

$$Q = Nq = -\frac{N\pi a^4}{8\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{A}{\eta}\frac{N\pi a^4}{8A}\left(-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right)$$

On trouve donc finalement $k = \dfrac{N\pi a^4}{8A}$.
NB : le signe moins devant la dérivée vient du fait que l'énoncé pose que la pression vaut $P - \mathrm{d}P$ à gauche, le signe moins est donc "caché".
Si on néglige l'aire des interstices pour N qui tend vers l'infini, on a a qui tend vers 0 et $A = N\pi a^2$. On a donc k qui tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

13. Le volume total de l'échantillon vaut $V_T = A\mathrm{d}z$.
Le volume des pores vaut quant à lui le volume total des cylindres soit $V_P = N\pi a^2$, on a donc $\phi = \dfrac{V_P}{V_T} = \dfrac{\pi a^2}{A}$.

La relation entre k et ϕ est donc : $\boxed{k = \phi\dfrac{a^2}{8}}$

14. Dans le cas évoqué, l'aire total vaut $A = 1$ m^2. Par ailleurs, on peut évaluer l'aire des pores *i.e.* l'aire latérale des N cylindres comme $A_P = N\pi r_N^2 = M^2\pi\left(\dfrac{1}{2M}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$. On trouve donc finalement : $\phi = \dfrac{\pi}{4}$.

15. Dans cette configuration, Q au travers d'une section est constant on a donc $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \text{cste} = \dfrac{P_1 - P_2}{l}$. Par application de la loi de Darcy, on a donc :

$$Q = A\frac{k}{\eta}\frac{P_1 - P_2}{l}$$

16. Considérons pour commencer l'association en parallèle.
On va évaluer séparément les débits Q_1 et Q_2. L'aire de chaque échantillon vaut respectivement $A_1 = h_1 e$ et $A_2 = h_2 e$. Par ailleurs, le gradient de pression est toujours constant et vaut $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{P_1 - P_2}{l}$, l'application de la loi de Darcy donne alors :

$$\begin{aligned} Q_1 &= h_1 e\frac{k_1}{\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} \\ Q_1 &= h_2 e\frac{k_2}{\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} \end{aligned}$$

Le débit Q est alors la somme des deux débits soit finalement :

$$Q = Q_1 + Q_2 = h_1 e\frac{k_1}{\eta}\frac{P_1 - P_2}{l} + h_2 e\frac{k_2}{\eta}\frac{P_1 - P_2}{l} = \underbrace{(h_1 + h_2)e}_{=A}\frac{1}{\eta}\underbrace{\frac{k_1 h_1 + k_2 h_2}{h_1 + h_2}}_{k_m}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$$

On trouve donc $k_m = \dfrac{k_1 h_1 + k_2 h_2}{h_1 + h_2}$.

Considérons maintenant l'association série.
Dans ce cas, c'est le débit Q qui passe au travers de l'échantillon. On va chercher à évaluer la différence de pression au bornes des deux échantillons. Appelant, P_1, P_2 et P_3 les pressions au début, au milieu (en l_1)

et à la fin de l'échantillon. Dans chaque roche, le débit est constant ce qui entraîne un gradient de pression constant soit finalement :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right)_1 &= \frac{P_1-P_2}{l_1}\\ \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right)_2 &= \frac{P_2-P_3}{l_2}\end{aligned}$$

On peut alors appliquer la loi de Darcy à chacun des roches soit (on rappelle qu'on le même débit Q dans chaque roche) :

$$\begin{aligned}Q &= A\frac{k_1}{\eta}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right)_1 = A\frac{k_1}{\eta}\frac{P_1-P_2}{l_1}\\ Q &= A\frac{k_2}{\eta}\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\right)_2 = A\frac{k_2}{\eta}\frac{P_2-P_3}{l_3}\end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned}P_1-P_2 &= Q\frac{\eta}{A}\frac{l_1}{k_1}\\ P_2-P_3 &= Q\frac{\eta}{A}\frac{l_2}{k_2}\end{aligned}$$

On peut alors en déduire la différence de pression totale au bornes de l'échantillon :

$$P_1-P_3 = P_1-P_2+P_2-P_3 = Q\frac{\eta}{A}\left(\frac{l_1}{k_1}+\frac{l_2}{k_2}\right) \Longrightarrow Q = \frac{A}{\eta}\frac{l_1+l_2}{\frac{l_1}{k_1}+\frac{l_2}{k_2}}\underbrace{\frac{P_1-P_3}{l_1+l_2}}_{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}}$$

Par identification, on a donc trouvé $k_m = \dfrac{l_1+l_2}{\frac{l_1}{k_1}+\frac{l_2}{k_2}} = k_1k_2\dfrac{l_1+l_2}{l_1k_2+l_2k_1}$

NB : il est tout à fait possible de retrouver ces résultats par une analogie électrique. En effet, l'équivalent de l'intensité I est alors le débit Q et l'équivalent de la tension (*i.e.* un différence de potentiel) et la différence de pression. On peut alors définir la résistance comme :

$$R_{el} = \frac{U}{I} \Longrightarrow \boxed{R = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{\eta l}{kA}}$$

On cherche alors à associer des résistances en parallèles ou en série ...

$$\text{En parallèle} \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{k_mA}{\eta l} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{k_1A_1}{\eta l}+\frac{k_2A_2}{\eta l} \text{ d'où } k_m = \frac{k_1A_1+k_2A_2}{A_1+A_2}$$

$$\text{En série} \quad R_{eq} = \frac{\eta l}{k_mA} = R_1+R_2 = \frac{\eta l_1}{k_1A}+\frac{\eta l_2}{k_2A} \Longrightarrow \frac{1}{k_m} = \frac{1}{l_1+l_2}\left(\frac{l_1}{k_1}+\frac{l_2}{k_2}\right) \Rightarrow k_m = k_1k_2\frac{l_1+l_2}{l_1k_2+l_2k_1}$$

On retrouve le même résultat beaucoup plus rapidement !

17. Le fluide est incompressible donc $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ soit $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}rv}{\mathrm{d}r} = 0$ d'où $v = \frac{K'}{r}$.
La vitesse à une distance r donnée est constante, on peut calculer simplement le débit :

$$Q = \iint \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint \underbrace{v}_{=\text{cste}}\mathrm{d}S = v\iint \mathrm{d}S = 2\pi rh\ v = 2\pi K'$$

On trouve donc un débit constant ce qui n'est guère étonnant car c'est une conséquence directe de l'incompressibilité de l'écoulement.
Le débit Q est constant, on a donc :

$$Q = 2\pi h\frac{k}{\eta}r\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} \Longrightarrow 2\pi h\frac{k}{\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \frac{Q}{r} \Longrightarrow [P] = [\ln r]\frac{Q\eta}{2\pi kh}$$

En intégrant entre R_i et R_e, on a alors :

$$\Delta P = P_e - P_i = \frac{Q\eta}{2\pi kh}\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)$$

18. Par application du résultat :

$$\Delta P = P_e - P_i = \frac{Q\eta}{2k\pi h}\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) \Longrightarrow Q = \frac{2k\pi h}{\eta}(P_G - P_1)\frac{1}{\ln\frac{R}{a}}$$

19. Calculons le rayon de l'enveloppe du système :

$$R_\infty = \sum r_p = \sum_{p=0}^{\infty} r_0\epsilon^p = \frac{r_0}{1-\epsilon}$$

L'aire totale du système *i.e.* de l'enveloppe (ou encore aire apparente) vaut alors $A_\infty = \pi R_\infty^2 = \dfrac{A_0}{(1-\epsilon)^2}$.
On va maintenant l'aire effective des pores. Cette aire est la somme de pores de toute taille soit :

$$A_r = \sum A_p = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{\pi^2}{4\nu}\right)^p A_0 = \sum_{p=0}^{\infty}(\epsilon^2\nu)^p A_0 = \frac{A_0}{1-\nu\epsilon^2}$$

On trouve alors la porosité de manière identique à ce qui s'est fait précédemment en comparant les aires des pores et totale soit :

$$\phi = \frac{\text{aire des pores}}{\text{aire totale}} = \frac{A_r}{A_\infty} = \frac{(1-\epsilon)^2}{1-\nu\epsilon^2}$$

Pour $\nu = 5$, on a $\epsilon = \frac{\pi}{2\nu} = 0,314$. On trouve alors par application numérique : $\phi = 0,93$.

20. Ici il y a probablement une erreur d'énoncé et il faut lire ϵ_p au lieu de ϵ (sinon on trouve quelque chose qui diverge ce qui n'est pas passionnant ...)

$$D_c = -\lim_{p\to\infty}\frac{\ln N_p}{\ln\epsilon_p} = -\lim_{p\to\infty}\frac{\ln 2 + p\ln\nu}{\ln p\ln\epsilon} = -\frac{\ln\nu}{\ln\epsilon}$$

NB : la formule est tout à fait cohérente avec le graphe présenté ce qui prouve bien qu'il y un bug qq part ...
Calculons le débit q_p au travers d'un tube de l'itération p, on a par application de la loi de la partie I :

$$q_p = \frac{\pi r_p^4}{16\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$$

On peut alors en déduire le débit Q_p au travers des pores de l'itération p :

$$Q_p = N_p q_p = 2(\nu\epsilon^4)^p\frac{\pi r_0^4}{16\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$$

Le débit total est la somme de tous les débit soit :

$$Q = \sum Q_p = \frac{\pi r_0^4}{8\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-\nu\epsilon^4} = \frac{A_0 r_0^2}{8\eta}\frac{1}{1-\nu\epsilon^4}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$$

On peut alors définir k en faisant apparaître l'aire apparente de l'échantillon et en écrivant :

$$Q = A_\infty\frac{k}{\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{\pi r_0^4}{8\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1-\nu\epsilon^4} \Longrightarrow k = \frac{1}{A_\infty}\frac{A_0 r_0^2}{8}\frac{1}{1-\nu\epsilon^4} = \frac{r_0^2}{8}\frac{(1-\epsilon)^2}{1-\nu\epsilon^4}$$

Soit finalement en faisant intervenir la porosité ϕ, $\boxed{k = \dfrac{r_0^2}{8}\phi\dfrac{1-\nu\epsilon^2}{A-\nu\epsilon^4}}$

$D_c = 1,4$, conduit à $\nu = 5$ soit finalement en faisant l'application numérique :$k = 0,494\frac{r_0^2}{8}$, là je ne vois pas trop à quoi comparer le résultat ...

21. En utilisant la loi de Darcy pour calculer Q, on a :

$$V_{fil} = \frac{Q}{A} = \frac{k}{\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{k}{\eta}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$$

Le changement de signe a déjà été souligné. On a $P - \mathrm{d}P$ en $x + \mathrm{d}x$ soit $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$.
La vitesse V_{fil} est directement une vitesse moyenne calculer sur un système très compliqué (roche poreuse), elle n'a donc rien avoir avec la vitesse dans un tube (qui est le champ de vitesse en un point d'un système parfaitement défini).

22. Effectuons un bilan de matière sur la portion de cylindre de section A et de longueur $\mathrm{d}z$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$. On va tout simplement écrire :

$$\text{ce qu'on à l'instant } t + \mathrm{d}t = \text{ce qu'on a à l'instant } t + \text{Termes de variation}$$

Évaluons maintenant chacun des termes :
- la quantité de matière à l'instant $t+\mathrm{d}t$: le volume accessible au fluide est $V_P = V_T\phi = A\mathrm{d}z\phi$. Connaissant la densité $\rho(t + \mathrm{d}t)$, la masse présente est alors $m(t + \mathrm{d}t) = \rho(t + \mathrm{d}t)A\mathrm{d}z\phi$.
- la quantité de matière à l'instant t : par un raisonnement analogue, on a $m(t) = \rho(t)A\mathrm{d}z\phi$.
- il reste maintenant à évaluer les termes de variations, il sort en $z + \mathrm{d}z$, le courant massique $j(z + \mathrm{d}z)$ soit une masse $j(z + \mathrm{d}z)A\mathrm{d}t$. De même, il rentre en z une masse $j(z)A\mathrm{d}t$.

On a donc finalement :

$$m(t + \mathrm{d}t) = m(t) + j(z)A\mathrm{d}t - j(z + \mathrm{d}z)A\mathrm{d}t \Longrightarrow A\mathrm{d}z\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t == -A\mathrm{d}t\mathrm{d}z\frac{\partial j}{\partial z} \Longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial z}$$

Enfin, il est possible d'évaluer le courant j. Soit une section, par définition de j, le flux massique au travers de A est jA. Par ailleurs, le débit volumique vaut $Q = V_{fil}A$, soit un débit massique $Q\rho = \rho V_{fil}A$, on a donc par identification $j = \rho V_{fil}$. On aboutit donc à l'équation recherchée :

$$\phi\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{j} = -\mathrm{div}\,\rho\vec{V_{fil}}$$

23. Par définition, on a :

$$\chi_T = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T = -\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial\rho}{\partial P}\right|_T$$

Par développement limité, on peut alors écrire :

$$\rho(P) = \rho(P_0 + \underbrace{P - P_0}_{\delta P}) = \rho_0 + \left.\frac{\partial\rho}{\partial P}\right|_T\delta P = \rho_0(1 - \chi_T(P - P_0))$$

Ce raisonnement n'est bien entendu valable que lorsque le développement est justifié soit $\chi_T\delta P \ll 1$.

24.

$$\phi\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(\rho V_{fil}) = -\rho\mathrm{div}\,\vec{V_{fil}} - \vec{V_{fil}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho$$

Par ailleurs, on a :

$$\rho = \rho_0(1 - \chi_T(P - P_0)) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = -\rho_0\chi_T\dfrac{\partial P}{\partial t}\\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho = -\rho_0\chi_T\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \vec{V_{fil}} = -\frac{k}{\eta}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$$

En utilisant ces expressions, on trouve alors :

$$\rho_0\phi\chi_T\frac{\partial P}{\partial t} = \rho\frac{k}{\eta}\Delta P + \frac{k\rho_0\chi_T}{\eta}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\right)^2$$

On trouve donc l'équation recherchée à la condition de pouvoir négliger le second terme (ce qui est à priori pas trop ambitieux car il s'agit seulement d'un ordre 2)... Par ailleurs, on cherche à raisonner à l'ordre 1, on

va donc écrire $\rho \simeq \rho_0$ dans le premier terme car ΔP est déjà d'ordre 1 en δP. La condition supplémentaire est donc $\dfrac{k\rho_0\chi_T}{\eta}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,P\right)^2 \ll \rho\dfrac{k}{\eta}\Delta P$ soit finalement $\chi_T\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,P\right)^2 \ll \Delta P$.
On a alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{k}{\eta\phi\chi_T}\Delta P = K\Delta P$$

On a donc $K = \dfrac{k}{\eta\phi\chi_T}$, K s'exprime en $m^2.\text{s}^{-1}$, il s'identifie à un coefficient de diffusion de la pression.

25. AN $K = 0,01\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

26. Physiquement, la loi rend compte de la "diffusion" de la pression *i.e.* de l'égalisation en tout point de l'échantillon du fait du flux de matière du point de haute pression vers celui de basse pression. Elle est valable tant que la loi de Darcy est valable ... Autrement dit, on est dans une hypothèse quasi stationnaire ce qui signifie que la vitesse calculée à partir de la loi de Darcy varie beaucoup plus lentement que la pression aux bornes de l'échantillon. Intuitivement, si le flux est suffisamment lent, une telle condition devrait être vérifiée ... Autrement dit dès que la différence de pression entre deux points n'est pas trop importante, la loi devrait être correcte !