

I. Préliminaires

I.1. Interaction de Van Der Waals

1- Utilisons la relation donnant le moment dipolaire induit : $C.m = \alpha \cdot \frac{C}{V} m^{-1} V m^{-1}$, car $\frac{1}{\epsilon_0} = \frac{V \cdot m^{-1}}{m} \frac{m^3}{C}$

en utilisant $\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. α s'exprime donc en m^3 .

2- $W_P = - \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{E}_x = - \alpha \frac{p_a^2}{4\pi^2 \epsilon_0 x^6} \cdot \mathbf{F}_{vdw}$ dérive de W_P , soit $\mathbf{F}_{vdw} = - \text{grad } W_P$, d'où $\mathbf{F}_{vdw} = - \frac{3\alpha p_a^2}{2\pi^2 \epsilon_0 x^7} \mathbf{x}$.

Lorsque x croît la force décroît très rapidement d'où « courte portée » ; d'autre part elle est dirigée suivant $-\mathbf{x}$ et est bien attractive.

I.2. Capacité de stockage

3- Le rayon de la cavité occupée est inférieur à celui de la cavité vide car la force attractive entre les molécules d'eau (dipôles \mathbf{p}_a) et la molécule incluse Σ (par exemple la molécule de méthane) les rapproche.

R : La distance dipôle- Σ est alors grossièrement de 300 pm, ce qui correspond à un peu plus de deux fois une distance interatomique typique soit à une « liaison de Van Der Waals ».

Si y_{dd} est trop faible la liaison de Van Der Waals ne peut s'établir : la structure est trop lâche et la molécule incluse ne peut rester de manière stable dans la cavité.

R : La structure est cependant modulable suivant la taille de Σ , ce qu'indique l'énoncé et que l'on imagine bien à partir de la figure de la page 1.

4- $395 - 140 = 255$ pm, doù $y_{dd} = 1$.

5- $R_{He} = 114$ pm. En prenant le plus petit rayon des quatre proposés, $391 - 140 = 251$ pm, soit $y_{dd} = 0.45 < 0.76$; He ne peut être inclus.

6- Le nombre de sites par unité de volume est le même pour les structures I et II : $\frac{2+6}{a_I^3} = \frac{16+8}{a_{II}^3}$; la proportion des deux n'influe pas sur la capacité de stockage.

7- 1 m^3 d'hydrate libre $n = \frac{8}{1200^3 \cdot 10^{-36}} \frac{1}{N_A}$ moles de CH_4 ; or $V_{\text{libéréCH}_4} = \frac{nRT}{P}$,
d'où $V_{\text{libéréCH}_4} = 187 \text{ m}^3$.

8- Le méthane est un gaz à effet de serre (plus « efficace » que CO_2 d'environ un facteur 10). On aurait donc une accentuation du réchauffement climatique.

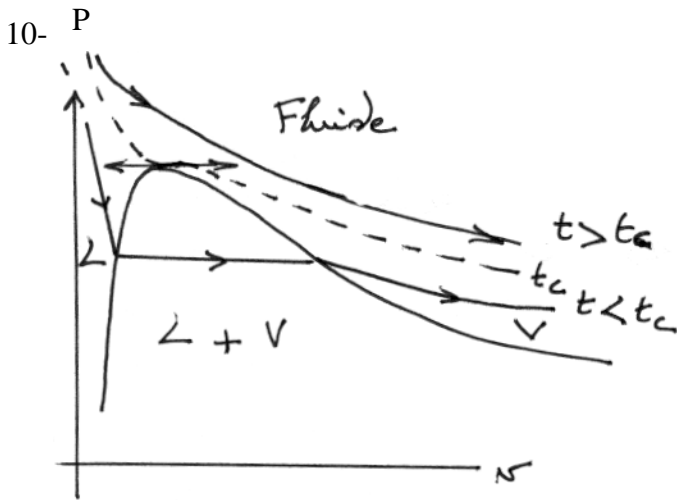
II. Climatisation

II.1. Primaire d'un système de climatisation

Remarque préliminaire : Les échanges énergétiques dans chaque élément du climatiseur sont caractérisés par la relation générale (démontrée en cours) : $\Delta(h + e_{macro} + e_{pext}) = w_u + q$, où w_u est le travail utile ou travail indiqué échangé et q l'échange thermique au niveau de l'élément.

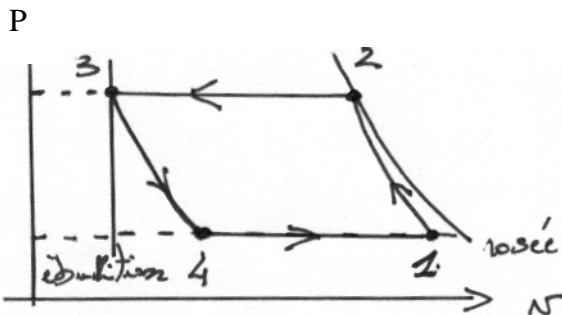
Dans le cadre de ce problème, $\Delta(e_{macro} + e_{pext}) = 0$ et la relation devient : $\Delta h = w_u + q$.

9- En utilisant le caractère isenthalpique de 3-4 : $h_L^{52} = x_4^V h_5^V + (1 - x_4^V) h_5^L$; l'application numérique donne bien $x_4^V = 0.3$.



Compte tenu des valeurs de t_c et P_c et des valeurs extrêmes du cycle, ce dernier est entièrement dans la zone $\{L + V\}$.

Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, il est donc résistant ce qui correspond bien à la fonction de climatisation (l'essentiel du travail échangé est celui fourni par le compresseur au fluide).



11- q_f correspond à 4-1 ; cette transformation est caractérisée (cf. remarque préliminaire en début de II.1.) par $q_f = \Delta h_{41}$ puisqu'il n'y a pas de travail utile dans l'évaporateur, soit $q_f = h_1 - h_4$, soit $q_f = (0.98 - 0.3)(394 - 11) = 260.44 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

12- **Réponse permettant d'obtenir la relation de l'énoncé** : La transformation 12 étant adiabatique, $\Delta u_{12} = w + q_{12} = w$; or $\Delta u_{12} = \Delta(h - PV) = \Delta h_{12} - \Delta(PV)$, avec $\Delta(PV) = P_2V_2 - P_1V_1$ où

$$P_1V_1 = \frac{0.98}{M}RT_1 + 0.02P_1V_{\text{liq}(P_1, T_1)} \text{ et } P_2V_2 = \frac{1}{M}RT_2, \text{ ce qui correspond à la formule de l'énoncé car}$$

$$P_1V_1 \text{ est très proche de } \frac{1}{M}RT_1.$$

Cette relation me semble fautive, car, comme indiqué plus haut, pour un fluide en écoulement permanent à travers un élément de machine, $\Delta(h + e_{\text{macro}} + e_{\text{pext}}) = w_u + q$, où w_u est le travail utile (ou indiqué) soit w ici (qui est le travail fourni par le compresseur et non au compresseur).

Comme q , Δe_{macro} et Δe_{pext} sont nuls, $w = \Delta h_{12}$.

$$\text{En gardant la formule de l'énoncé, } w = h_{52}^V - (0.98h_5^V + 0.02h_5^L) - \frac{R}{M}\Delta T_{12}.$$

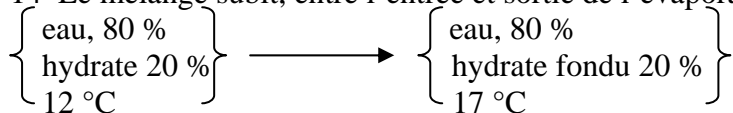
$$\text{L'AN donne } w = 72.2 \text{ kJ.kg}^{-1} \text{ (75.5 kJ.kg}^{-1} \text{ avec } w = \Delta h_{12}\text{).}$$

13- $e = \frac{q_f}{w} = 3.6$ (en tenant compte de $w = \Delta h_{12}$, $e = 3.45$ ce qui est très proche, le terme de travail de pression étant très faible devant le terme énergétique de changement d'état).

Pour un cycle de Carnot, $e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 5.9$ ce qui correspond à l'efficacité maximale pour un cycle ditherme réversible, on a bien $e < e_C$.

II.2. Utilisation du coulis d'hydrate de TBAB

14- Le mélange subit, entre l'entrée et sortie de l'évaporateur, la transformation suivante :



Donc $\Delta h = 0.8(17-12)c_p^e + 0.2(17-12)c_p^{\text{hyd}} + 0.2l_{\text{fus}}^{\text{hyd}}$; soit $\Delta h = 58.94 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

15- Dans 6 m^3 il y a une masse de $6 \cdot 1020 = 6120 \text{ kg}$, soit $\Delta H_S = 360.7 \cdot 10^3 \text{ kJ}$.

16- La puissance maximale étant P_{clim} , $\Delta t = \frac{\Delta H_S}{P_{\text{clim}}} = 17 \text{ heures}$.

Le climatiseur peut fonctionner 17 heures d'affilée à puissance maximale avant que l'on doive restocker le coulis.

17- Il faut reconstituer la réserve énergétique correspondant à ΔH_S ; en supposant que l'évaporateur du primaire a une efficacité de 100 %, il faut en 6h une masse $m = \frac{\Delta H_S}{q_f}$ ayant traversé, soit 1355 kg de butane en 6h donc $D_m = 226 \text{ kg.h}^{-1}$.

III. Fluide de BINGHAM

III.1. Profil de vitesse

18- $\dot{\gamma}$ s'exprime en s^{-1} .

* τ s'exprime en Pa et compte-tenu de l'unité de γ , η_p a bien la dimension d'une viscosité (Pa.s).

19- $\text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u(r, z)}{\partial z}$; or le fluide est incompressible, donc l'écoulement l'est aussi et $\frac{D\rho}{Dt} = 0$;

l'équation de conservation de la charge donne $\text{div} \mathbf{u} = 0$ et donc $\frac{\partial u(r, z)}{\partial z} = 0$ et u fonction de r uniquement.

20- L'écoulement est permanent : $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Comme $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_z$, $(\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{u} = \mathbf{0}$, d'où comme $\tau = f(r)$,

$$- \frac{\partial P}{\partial r} = 0,$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0,$$

$$- \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau(r)).$$

21- $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau(r))$ étant indépendant de z , on intègre entre les deux bouts du tuyau pour obtenir la relation cherchée.

22- En intégrant la relation $\frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau(r))$ par rapport à r : $r\tau(r) = \frac{r^2}{2} \frac{\Delta P}{L} + Cte$; or en $r = 0$ la fonction $\tau(r)$ ne diverge pas donc la Cte est nulle.

23- * Si $R_0 > R$, $\tau(r)$ reste toujours inférieur à τ_s donc $\dot{\gamma} = 0$, soit $\frac{du}{dr} = 0$, or $u(R) = 0$ donc $u(r) = 0$.

* A la limite $R = R_0$ et $\Delta P_{\min} = \frac{2\tau_s L}{R}$.

24- * Si $R > R_0$ et $r > R_0$, $\tau(r) = \tau_s \frac{r}{R_0} = \frac{\Delta P}{2L} r$ et $\tau(r) = \tau_s + \eta_p \dot{\gamma} = \frac{\Delta P}{2L} R_0 - \eta_p \frac{du}{dr}$.

d'où, $\frac{\Delta P}{2L} (R_0 - r) = \eta_p \frac{du}{dr}$; en intégrant et en tenant compte de $u(R) = 0$,

$$u(r) = \frac{\Delta P}{2\eta_p L} (R - r)(R + r - 2R_0).$$

* Si $R > R_0$ et $r < R_0$, $\tau(r) = \frac{\Delta P}{2L} r$ et $\dot{\gamma} = 0$, d'où $u(r) = Cte$ et comme la vitesse est continue dans le fluide, $u(r) = u(R_0)$, soit $u(r) = \frac{\Delta P}{2\eta_p L} (R - R_0)^2$.

25- $u(r)$ est constante pour $r < R_0$ et décroît pour $r > R_0$ jusqu'à s'annuler en $r = R$; donc la zone $R_0 < r < R$ est une zone où le fluide s'écoule peu : « zone bouchon ».

III.2. Caractérisation expérimentale d'un fluide de Bingham

26- $Q = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = 2\pi \left[u(r) \frac{r^2}{2} \right]_0^R - \int_0^R 2\pi \frac{r^2}{2} \left(\frac{du}{dr} \right) dr$ en intégrant par parties ; comme $-\frac{du}{dr} = -\dot{\gamma}$, $u(R) = 0$ et $u(0)0^2 = 0$, on obtient le résultat demandé.

27- En 22- nous avons montré que $\tau(r) = \frac{r}{2} \frac{\Delta P}{L}$, soit $d\tau = dr \frac{\Delta P}{2L} = dr \frac{\tau_p}{R}$, d'où avec 26- :

$$Q = \int_0^{\tau_p} \dot{\gamma} \pi \left(\frac{R\tau(r)}{\tau_p} \right)^2 \frac{R}{\tau_p} d\tau = \pi \frac{R^3}{\tau_p^3} \int_0^{\tau_p} \tau^2 \dot{\gamma} d\tau, \text{ ce qui correspond bien à la relation de l'énoncé.}$$

28- $\frac{U_d}{R} = \frac{1}{\tau_p^3} \int_0^{\tau_p} \tau^2 \dot{\gamma} d\tau$; or, $\dot{\gamma} = 0$ pour $\tau < \tau_s$, et $\dot{\gamma} = \frac{\tau - \tau_s}{\eta_p}$, pour $\tau > \tau_s$, d'où

$$\frac{U_d}{R} = \frac{1}{\tau_p^3} \int_{\tau_s}^{\tau_p} \tau^2 \frac{\tau - \tau_s}{\eta_p} d\tau = \frac{U_d}{R} = \frac{1}{\tau_p^3} \left[\frac{\tau_p^4 - \tau_s^4}{4\eta_p} - \frac{\tau_p^3 \tau_s - \tau_s^4}{3\eta_p} \right] = \frac{\tau_p}{\eta_p} \left[\frac{1}{4} - \frac{\tau_s}{3\tau_p} \right], \text{ en négligeant les}$$

termes d'ordre 4 en $\frac{\tau_s}{\tau_p}$. Et finalement $\frac{U_d}{R} = \frac{1}{\eta_p} \left[\frac{R\Delta P}{8L} - \frac{R_0\Delta P}{8L} \right]$ ce qui est le résultat cherché.

29- Pour que Q soit non nul il faut que U_d soit non nul donc $\Delta P > \Delta P_0$. En disposant une prise de pression en entrée et une en sortie, on mesure la pression différentielle e/s lorsque le fluide commence à s'écouler sous l'effet d'une contrainte croissante.

30- Oui cela semble linéaire dans des domaines assez larges pour les différents types de points, mais on ne peut pas dire que la figure soit très explicite !

31- En dérivant :
$$\frac{d(\ln(\frac{U_d}{R}))}{d\tau_p} = -\frac{3}{\tau_p} + \frac{\tau_p^2 \dot{\gamma}(R)}{\int_0^{\tau_p} \tau^2 \dot{\gamma} dr} ; \text{ or, } \int_0^{\tau_p} \tau^2 \dot{\gamma} dr = U_d \frac{\tau_p^3}{R}, \text{ d'où :}$$

$$d(\ln(\frac{U_d}{R})) = (-\frac{3}{\tau_p} + \frac{\tau_p^2 \dot{\gamma}(R)}{U_d \frac{\tau_p^3}{R}}) d\tau_p \text{ et en remarquant que } \frac{d\tau_p}{\tau_p} = d(\ln(\tau_p)) = d(\ln(\frac{R\Delta P}{2L})) \text{ on obtient la}$$

relation donnée dans l'énoncé.

32- La mesure de Q (débit) permet d'obtenir U_d , celle de ΔP donne v (avec U_d) et la formule du 31- permet de déterminer $\dot{\gamma}(R)$.

Cette quantité pourrait aussi se mesurer à partir d'une visualisation (traceurs) de l'évolution de $u(r)$ pour r proche de R et d'une exploitation de cette fonction permettant d'obtenir $-(\frac{du}{dr})_R = \dot{\gamma}(R)$.

FIN DU PROBLEME