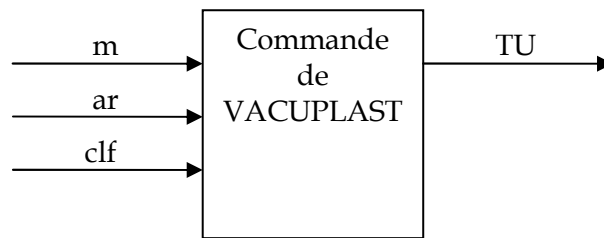


DOSEUR PONDERAL DE GRANULES PLASTIQUES

I - ETUDE DE LA FONCTION ALIMENTER ET MAINTENIR A NIVEAU LA TREMIE DU MACRO-PRODUIT

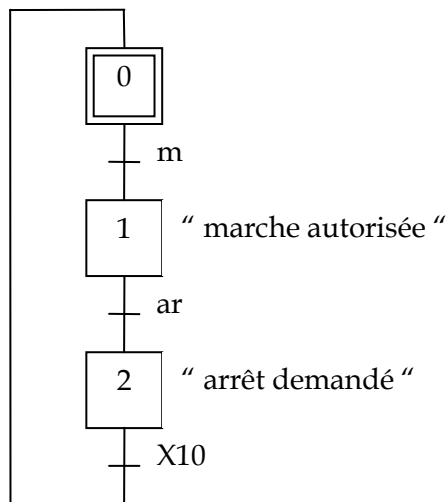
I-1 Commande de l'aspirateur VACUPLAST

Question 1 : Liste des entrées et sorties

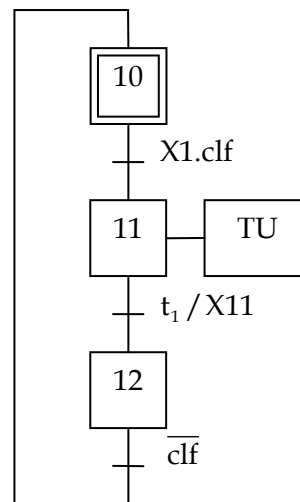


Grafcet de commande : cycle normal et commande générale de marche arrêt

Grafcet de commande générale marche arrêt

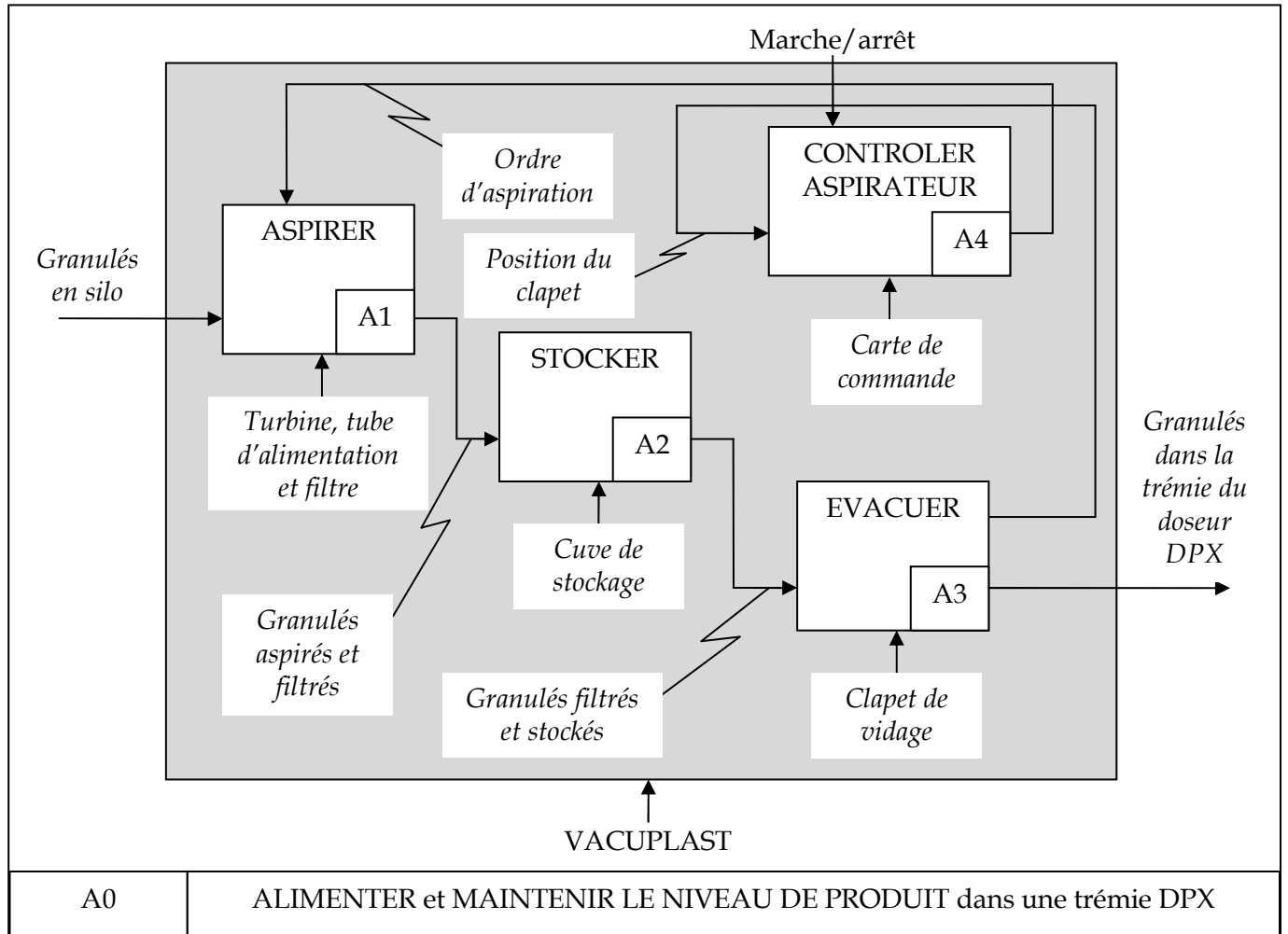


Grafcet de gestion d'un cycle



I-2 Etude fonctionnelle

Question 2 : Compléter le niveau A0



II - ETUDE GNERIQUE DE LA FONCTION DOSER

II-1 Analyse du procédé de dosage

Question 3 : Compléter le tableau de valeurs des batch 2 et 3

La lecture du grafcet de commande du procédé de dosage (document D4-3) permet de retrouver les relations ci-dessous, vérifiables par les valeurs numériques (en grammes) du batch de rang 1.

Etape 0 d'initialisation : $CMAP(1) = ConsMAP$ A.N. : $CMAP(1) = 960 \text{ g.}$
 $CMIP(1) = ConsMIP$ A.N. : $CMIP(1) = 40 \text{ g.}$

Chute du macro-produit : la masse courante de macro-produit $MAP(n)$ est la masse mesurée $Mec(n)$

Erreur sur la masse du macro-produit :
 $EJMAP(n) = ConsMAP - MAP(n)$ A.N. : $EJMAP(1) = 960 - 1020,5 = -60,5 \text{ g.}$

Correction de la masse de macro-produit commandée :
 $CMAP(n+1) = CMAP(n) + Kma \cdot EJMAP(n)$ A.N. : $CMAP(2) = 960 - 30,25 = 929,75 \text{ g.}$

Chute du micro-produit : la masse courante de micro-produit est :

$$MIP(n) = \text{masse totale mesurée}(n) - MAP(n)$$

A.N. : $MIP(1) = 1065,0 - 1020,5 = 44,50 \text{ g.}$

Erreur sur la masse du micro-produit :

$$EJMIP(n) = \text{ConsMIP} - MIP(n)$$

A.N. : $EJMIP(1) = 40 - 44,50 = -4,50$

Correction de la masse de micro-produit commandée :

$$CMIP(n+1) = CMIP(n) + Kmi \cdot EJMIP(n)$$

A.N. : $CMIP(2) = 40 - 1,50 = 38,5 \text{ g.}$

Valeurs numériques de Kma et Kmi

$$Kma = \frac{Kma \cdot EJMAP(1)}{EJMAP(1)} ; \quad \text{A.N. : } Kma = \frac{-30,25}{-60,50} = 0,5$$

$$Kmi = \frac{Kmi \cdot EJMIP(1)}{EJMIP(1)} ; \quad \text{A.N. : } Kmi = \frac{-1,50}{-4,50} = \frac{1}{3}$$

Rang n du batch	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ConsMAP	960,0	960,0	960,0	960,0	960,0	960,0	960,0	960,0	960,0	960,0
CMAP(n)	960,00	929,75	906							
Mec	1020,50	1007,5	973,2	963,50	955,10	957,70	973,20	963,50	952,50	963,50
EJMAP	-60,50	-47,50	-13,20							
Kma*EJMAP	-30,25	-23,75	-6,60							
CMAP(n+1)	929,75	906	899,40							
ConsMIP	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
CMIP(n)	40	38,5	37,3							
Masse totale commandée	1060,5	1046,0	1010,50							
Masse totale mesurée	1065,0	1051,1	1015,3	1004,7	995,7	996,4	1015,9	1004,7	998,9	1001,6
MIP	44,50	43,60	42,10							
EJMIP	-4,50	-3,60	-2,10							
Kmi*EJMIP	-1,50	-1,20	-0,70							
CMIP(n+1)	38,50	37,30	36,60							

Toutes masses en grammes

II-2 Etude de la fonction « Doser le micro-produit »

Question 4 : Rotation de la vis d'Archimède après coupure de l'alimentation du moteur

Il s'agit d'un problème abordable par le théorème de la puissance cinétique, appliqué deux fois : une pour la détermination du couple résistant C_r exercé par les granulés sur la vis, l'autre pour obtenir l'angle dont a tourné la vis après la coupure d'alimentation du moteur.

On isole l'ensemble $\Sigma = \{\text{rotor ; arbres du réducteur ; vis d'Archimède}\}$. Le théorème de la puissance cinétique appliqué à Σ en mouvement dans le référentiel terrestre galiléen R_g , associé au bâti noté 0, s'écrit :

$$\frac{d}{dt}T(\Sigma / R_g) = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_g) + P_i(\Sigma), \text{ avec}$$

- $T(\Sigma / R_g)$ énergie cinétique galiléenne de l'ensemble Σ dans R_g
- $P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_g)$ puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures que subit Σ

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_g) = \underbrace{P(\text{stator} \rightarrow \text{rotor} / R_g)}_{\text{puissance moteur}} + \underbrace{P(0 \rightarrow \text{arbres} / R_g)}_{\text{puissance dissipée dans les liaisons avec le bâti}} + \underbrace{P(\text{granulés} \rightarrow \text{vis} / R_g)}_{\text{puissance due au couple résistant exercé par les granulés sur la vis}}$$
- $P_i(\Sigma)$ puissance des actions mécaniques intérieures à Σ

$$P_i(\Sigma) = \underbrace{P_f(\text{réducteur})}_{\text{puissance dissipée dans les liaisons du réducteur}} + \underbrace{P_{ém}(\text{moteur})}_{\text{puissance dissipée par les pertes d'origines électrique et électromagnétique du moteur}}$$

a. Détermination du couple résistant exercé par les granules sur la vis

On se place en régime établi à vitesse nominale (approximation par rapport à la réalité) ; alors :

$$0 = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_g) + P_i(\Sigma)$$

En négligeant les pertes d'énergies par frottement et les pertes d'origine électrique, on obtient :

$$0 = \underbrace{P(\text{stator} \rightarrow \text{rotor} / R_g)}_{\text{puissance moteur}} + \underbrace{(-C_r \omega_v)}_{\text{puissance due au couple résistant exercé par les granulés sur la vis}}, \text{ avec } \omega_v = r \omega_m, \text{ vitesse de rotation de la vis d'Archimède}$$

et $\omega_m = \frac{\pi N_n}{30}$ vitesse de rotation du moteur.

Dans cette situation, la puissance motrice est égale à 70% de la puissance nominale P. Alors :

$$\boxed{C_r = \frac{21P}{r \pi N_n}} \quad \text{A.N. : } C_r \cong 19 \text{ Nm}$$

b. Angle dont a tourné la vis après la coupure d'alimentation du moteur

Dans cette situation, en négligeant les puissances dissipées par frottement et les pertes d'origine électrique, la puissance motrice est nulle : $\underbrace{P(\text{stator} \rightarrow \text{rotor} / R_g)}_{\text{puissance moteur}} = 0$; d'où :

$$\frac{d}{dt} T(\Sigma / R_g) = \underbrace{(-C_r \omega_v)}_{\substack{\text{puissance due au couple} \\ \text{résistant exercé par les} \\ \text{granulés sur la vis}}}$$

L'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble Σ est : $T(\Sigma / R_g) = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_r \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_v \omega_v^2$, soit $T(\Sigma / R_g) = \frac{1}{2} J_{\text{éq}} \omega_m^2$, avec $J_{\text{éq}} = J_m + J_r + r^2 J_v$. D'où :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (J_m + J_r + r^2 J_v) \omega_m^2 \right] = -C_r \omega_v, \text{ soit } \boxed{\dot{\omega}_m = - \left(\frac{r}{J_m + J_r + r^2 J_v} \right) C_r}$$

Par intégration de cette équation différentielle et en tenant compte des conditions initiales du freinage $\left(\omega_m(0) = \omega_0 = \frac{\pi N_n}{30} \text{ et } \theta_m(0) = 0 \right)$, on obtient :

- La durée T du freinage jusqu'à l'arrêt complet : $T = \frac{J_{\text{éq}} \omega_0}{r C_r}$
- La rotation $\theta_m(T)$ du rotor moteur jusqu'à arrêt complet de la vis :

$$\theta_m(T) = \frac{\omega_0^2 J_{\text{éq}}}{2 r C_r}$$

On déduit la rotation de la vis durant l'arrêt en rappelant que : $\theta_v(T) = r \theta_m(T)$;

$$\boxed{\theta_v(T) = \frac{\omega_0^2 J_{\text{éq}}}{2 C_r}} \text{ ou encore } \boxed{\theta_v(T) = r (\pi N_n)^3 \frac{J_m + J_r + r^2 J_v}{37800 P}} \quad \text{A.N. : } \theta_v(T) = 0,5 \text{ rad} = 29 \text{ degrés}$$

Influence de cet angle

La queue de chute du micro-produit a deux origines :

1. La quantité (de masse M_{lv}) libérée par la vis d'Archimède au moment de l'arrêt de l'alimentation du moteur, mais non encore pesée
2. La quantité de granulés (de masse M_{rv}) évacuée par la vis d'Archimède du fait de l'angle de rotation $\theta_v(T)$ accompli par la vis après l'arrêt de l'alimentation du moteur

Compte tenu du processus itératif de réglage de la masse de micro-produit commandée, la quantité de granulés M_{rv} est sans influence sur la qualité de dosage si :

- elle est répétitive d'un batch à l'autre
- si la durée de chute T_c des granulés est inférieure au délai de pesée D après arrêt de l'alimentation du moteur de la vis, diminué du temps T nécessaire à l'arrêt de la vis :

$$T_c < D - T$$

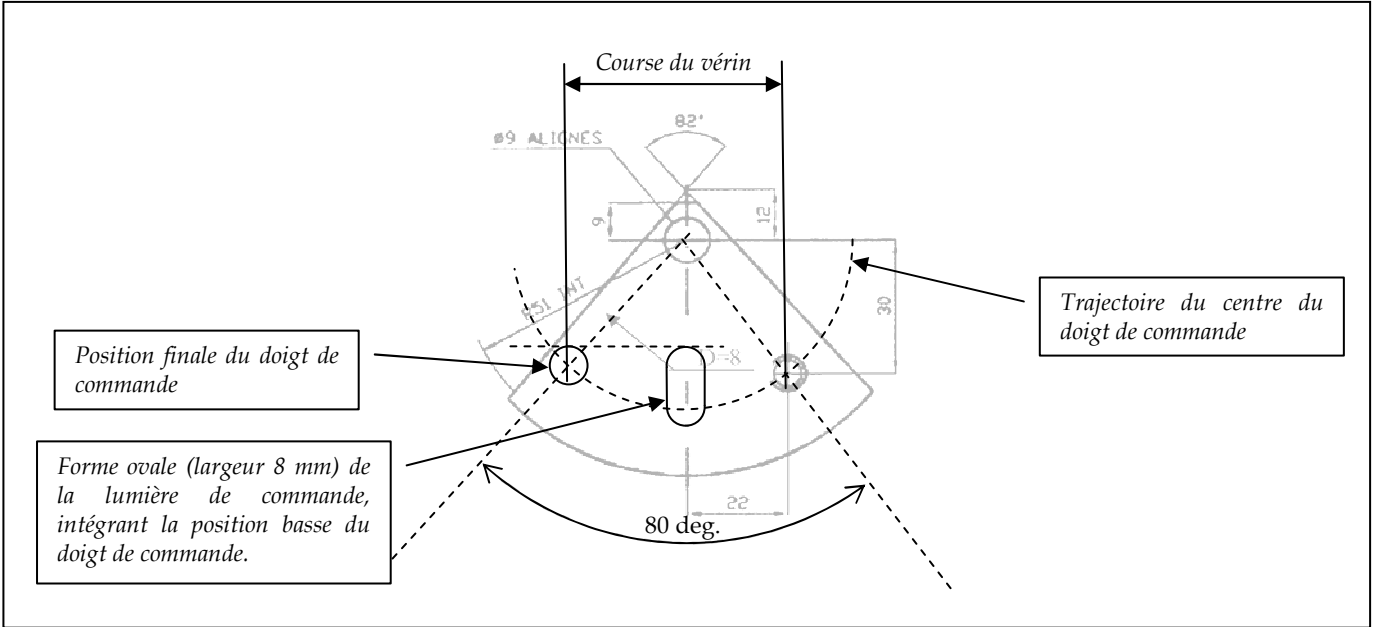
L'application numérique donne $T = 0,11 \text{ s}$; le document 4.3 fournit l'information $D = 0,5 \text{ s}$; donc,

$$\boxed{T_c < 0,39 \text{ s}}$$

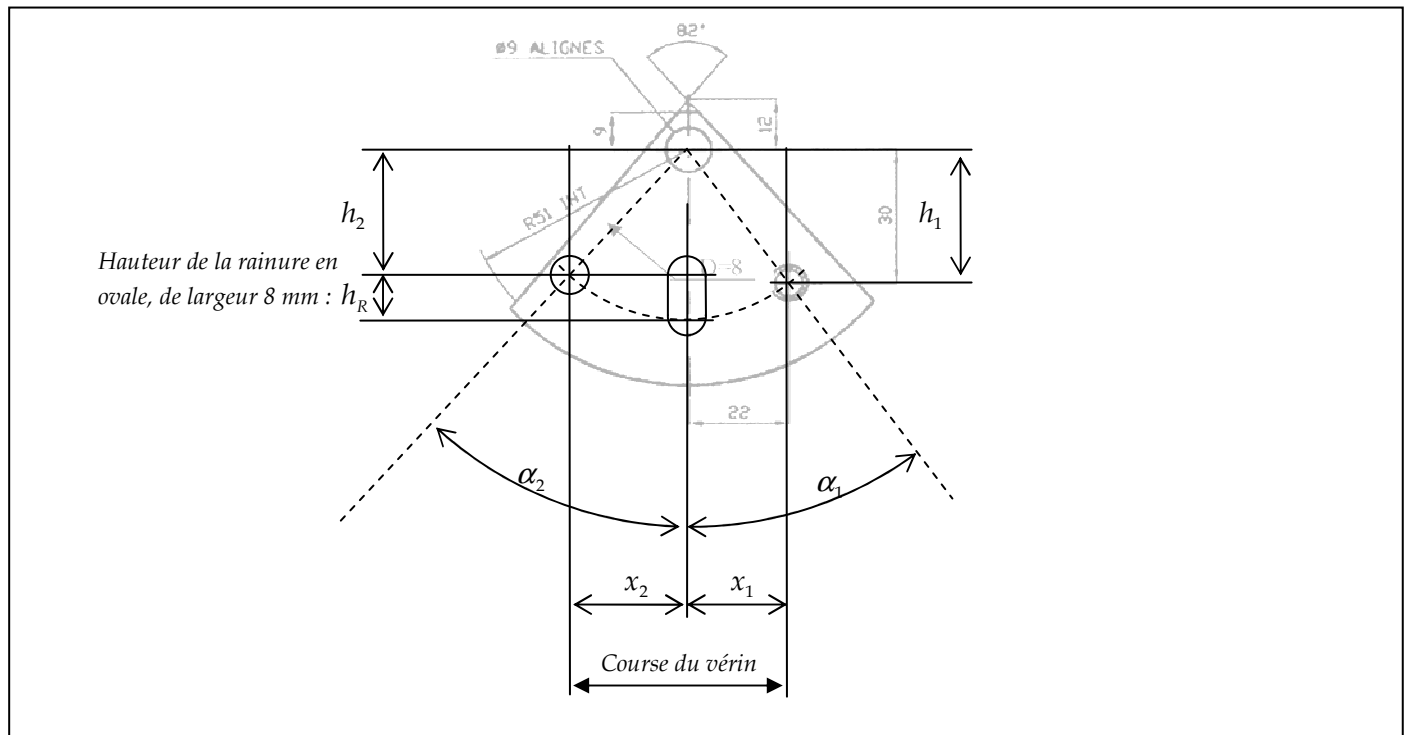
II-3 Etude de la fonction « Doser le macro-produit »

Question 5 : Course du vérin et forme de la lumière de commande

La construction graphique permettant l'obtention de la course du vérin et de la forme de la lumière de commande est reportée ci-dessous.



Détermination analytique



- La course du vérin se détermine par : $c = x_1 + x_2$. On pose $x_2 = R \sin \alpha_2$, où R est le rayon de la trajectoire du centre du doigt : $R = \sqrt{h_1^2 + x_1^2}$. On obtient l'angle α_2 en degrés par : $\alpha_2 = 80 - \alpha_1$;

ce qui permet d'obtenir $\sin \alpha_2 = \sin 80 \cos \alpha_1 - \cos 80 \sin \alpha_1$. Sachant que $\cos \alpha_1 = \frac{h_1}{R}$ et que $\sin \alpha_1 = \frac{x_1}{R}$, on obtient : $c = x_1(1 - \cos 80) + h_1 \sin 80$.

A.N. : $c = 48 \text{ mm}$

- La hauteur de la rainure ovale, dont les extrémités sont des demi-cylindres de rayon 4 mm, se détermine par : $h_R = R - h_2$, avec $h_2 = R \cos \alpha_2$; soit $h_R = R - h_1 \cos 80 - x_1 \sin 80$.

AN. : $h_R = 10,3 \text{ mm}$

III - ETUDE DU PROCESSUS DE FABRICATION DU BATCH

Question 6 : Justification du modèle

La courbe de réponse à un échelon de la partie opérative de la distribution du produit présente les caractéristiques de celle d'un système fondamental du premier ordre :

- Pas de dépassement de la valeur en régime établi
(ce qui peut être considéré comme une approximation selon la précision de lecture de la courbe) ;
- Pas de point d'inflexion de la courbe dans le domaine transitoire ;
- On peut supposer que la tangente à la courbe est maximale (et donc non nulle) à $t = 0$.

Coefficients de la fonction de transfert

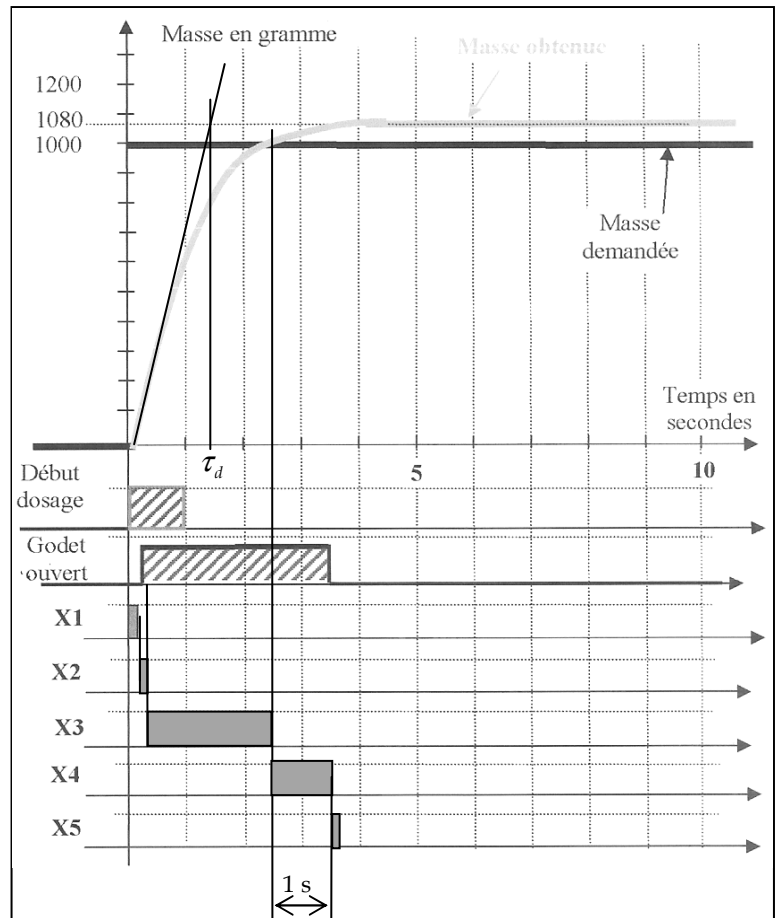
Le modèle adopté étant celui d'un premier ordre fondamental de fonction de transfert

$$D(p) = \frac{K_d}{1 + \tau_d p}, \text{ on en détermine les caractéristiques par identification :}$$

- $K_d = \frac{\text{Masse obtenue}}{\text{Masse demandée}}$, soit : $K_d = 1,08$
- La constante de temps τ_d est l'abscisse à laquelle la tangente à la courbe à l'origine coupe l'asymptote horizontale du régime permanent, soit : $\tau_d \cong 1,3 \text{ s}$

Erreur de jetée

Erreur de jetée = Masse demandée - Masse obtenue ; soit : $\text{Erreur de jetée} = - 80 \text{ g}$



Question 7 : Evolution des situations du grafctet de dosage

Voir figure ci-dessus.

On remarque que le front descendant de " Godet ouvert " aurait du intervenir, au temps de réaction près de la chaîne fonctionnelle de fermeture, à l'instant où la " Masse en cours " atteint la " Masse demandée " .

Question 8 : Equation récurrente de la consigne de masse CMAP(n)

$CMAP(2)=ConsMAP+Kma.EJMAP(1)$ et $CMAP(3)=CMAP(2)+Kma.EJMAP(2)$; on en déduit que

$$CMAP(3)=ConsMAP+Kma.\sum_{i=1}^2 EJMAP(i)$$

Ce résultat nous amène à proposer la relation récurrente à l'ordre n :

$$CMAP(n)=ConsMAP+Kma.\sum_{i=1}^{n-1} EJMAP(i)$$

- Initialisation : $CMAP(1)=ConsMAP$, $CMAP(2)$ et $CMAP(3)$ vues ci-dessus
- Vérification à l'ordre $n+1$: on suppose vraie l'expression à l'ordre n ;
alors $CMAP(n+1)=CMAP(n)+Kma.EJMAP(n)$;

soit $CMAP(n+1)=ConsMAP+Kma.\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} EJMAP(i)+Kma.EJMAP(n)}_{Kma.\sum_{i=1}^n EJMAP(i)}$; l'expression est vérifiée à

l'ordre $n+1$

Question 9 : Schéma bloc de la commande

Remarque : La transformation de la sommation discrète des erreurs de jetée en une intégrale nécessite à notre avis une correction, rendant l'expression plus cohérente et homogène :

$$\sum_{i=1}^{n-1} EJMAP(i) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n-1} (EJMAP(i) \cdot T) \text{ et est remplacé par } \frac{1}{T} \int_0^t EJMAP(\tau) d\tau$$

Cette nouvelle expression est conservée dans la suite du corrigé.

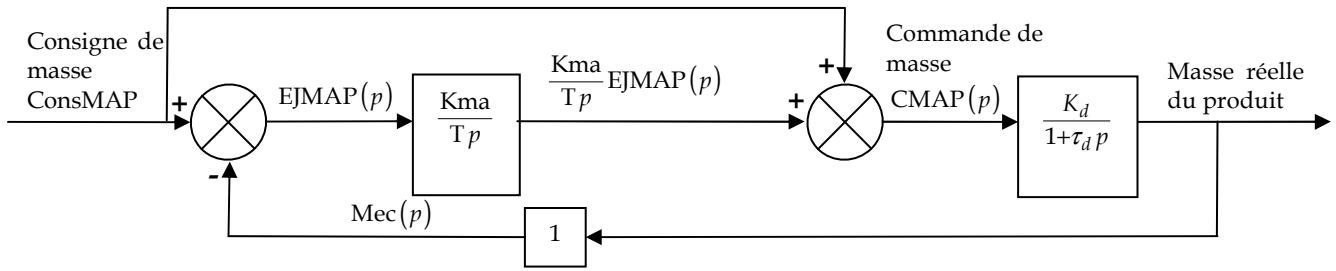
L'équation différentielle de la commande de masse faisant appel aux fonctions $[CMAP(t) - ConsMAP]$ et $EJMAP$ de conditions initiales nulles, on peut appliquer sur ses termes la transformée de Laplace \mathcal{L} et ainsi obtenir la fonction de transfert $C(p)$:

$$CMAP(t) - ConsMAP = \frac{Kma}{T} \int_0^t EJMAP(\tau) d\tau$$

On pose $CMAP^*(p) = \mathcal{L}[CMAP(t) - ConsMAP]$ et $EJMAP(p) = \mathcal{L}[EJMAP(t)]$; d'où :

$$C(p) = \frac{CMAP^*(p)}{EJMAP(p)} = \frac{Kma}{Tp}$$

D'où le schéma bloc de la commande de masse :



Question 10 : Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée

$$\text{Masse réelle} = \frac{K_d}{1 + \tau_d p} \left[\text{ConsMAP} + \frac{Kma}{Tp} \left(\text{ConsMAP} - \underbrace{\text{Mec}(p)}_{\text{Masse réelle}} \right) \right] ; \text{ soit :}$$

$$\frac{\text{Masse réelle}}{\text{ConsMAP}} = \frac{K_d (Kma + Tp)}{Kma K_d + Tp (1 + \tau_d p)}$$

Sous forme canonique :

$$\frac{\text{Masse réelle}}{\text{ConsMAP}} = \frac{1 + \frac{T}{Kma} p}{1 + \frac{T}{K_d Kma} p + \frac{T \tau_d}{K_d Kma} p^2} , \text{ fonction de transfert du second ordre,}$$

de classe 0, possédant un zéro au numérateur et de gain unitaire.

Déduction de la fonction de transfert en boucle ouverte

En supposant que cette fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) provient d'une structure à rétroaction de gain unitaire, on peut écrire :

$$\text{FTBF} = \frac{\text{FTBO}}{1 + \text{FTBO}} , \text{ où FTBO représente la fonction de transfert en boucle ouverte, soit :}$$

$$\text{FTBO} = \frac{\text{FTBF}}{1 - \text{FTBF}}$$

Dans ce cas, on obtient :

$$\frac{Kma K_d}{T(1 - K_d)} \left[\frac{1 + \frac{T}{Kma} p}{p \left(1 + \frac{\tau_d}{1 - K_d} p \right)} \right]$$

Précision obtenue

Cette fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1 (présence d'un intégrateur 1/p dans la fonction), ce qui induit une erreur statique nulle en boucle fermée.

IV - ETUDE DE LA FONCTION PESAGE

Question 11 : Relation $P = f(C_{eA})$

Il s'agit d'un problème plan de normale \vec{Z} , pour lequel l'ordonnancement des isolements est donné. Ne sont reportées sur la figure ci-après que les composantes déterminées par les équations scalaires établies ci-après.

- **On isole 5**

Solide soumis à :

- $\{\tau_{1 \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 5) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$ en D, due à la liaison pivot parfaite dans ce problème plan de normale \vec{Z}
- $\{\tau_{8 \rightarrow 5}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(8 \rightarrow 5) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$ en C, due à la liaison pivot parfaite dans ce problème plan de normale \vec{Z}

5 étant supposé en équilibre dans le référentiel terrestre galiléen, on en déduit que ces deux forces ont pour droite support (CD); d'où :

$$\vec{R}(8 \rightarrow 5) = Cx.\vec{X}$$

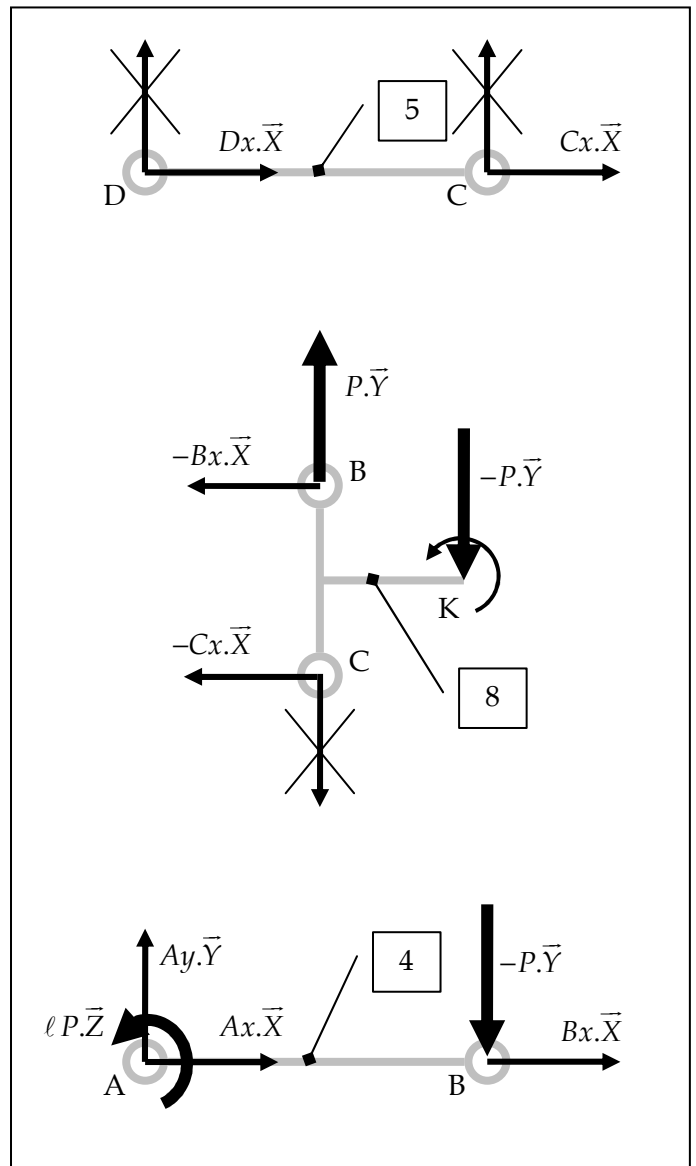
- **On isole 8**

Solide soumis à :

- $\{\tau_{4 \rightarrow 8}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(4 \rightarrow 8) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$ en B, due à la liaison pivot parfaite dans ce problème plan de normale \vec{Z} , avec l'écriture suivante imposée par la figure du document réponse : $\vec{R}(4 \rightarrow 8) = -Bx.\vec{X} - By.\vec{Y}$
- $\{\tau_{5 \rightarrow 8}\} = \begin{Bmatrix} -\vec{R}(8 \rightarrow 5) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$, par le théorème des actions mutuelles en C entre 5 et 8, avec $\vec{R}(8 \rightarrow 5) = Cx.\vec{X}$
- $\{\tau_{trémie \rightarrow \text{capteur}}\} = \begin{Bmatrix} -P.\vec{Y} \\ M_K.\vec{Z} \end{Bmatrix}_K$

On suppose 8 en équilibre dans le référentiel terrestre galiléen; le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{Y} permet d'écrire :

$$By = -P$$



• **On isole 4**

Solide soumis à :

- $\{\tau_{8 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} -\bar{R}(4 \rightarrow 8) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$ en B, par le théorème des actions mutuelles en C entre 5 et 8, avec

$$\bar{R}(4 \rightarrow 8) = -Bx.\bar{X} + P.\bar{Y}$$

- $\{\tau_{1 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{matrix} \bar{R}(1 \rightarrow 4) \\ \bar{M}(A, 1 \rightarrow 4) \end{matrix} \right\}_A$, due à la liaison pivot élastique dans ce problème plan de normale \bar{Z} ,

avec : $\bar{R}(1 \rightarrow 4) = Ax.\bar{X} + Ay.\bar{Y}$ et $\bar{M}(A, 1 \rightarrow 4) = Ce_A.\bar{Z}$

On suppose 4 en équilibre dans le référentiel terrestre galiléen ; le théorème du moment statique en A, en projection sur \bar{Z} permet d'écrire : $Ce_A - \ell.P = 0$

D'où la relation demandée : $Ce_A = \ell.P$

V - ETUDE DE LA FONCTION VIDER LA TREMIE DE PESAGE

V-1 Analyse de solutions constructives

Question 12 : Solution assurant le pesage correct du produit

Le bilan des actions mécaniques subies par l'ensemble $\Sigma = \{cuve ; granules ; clapet ; tige de vérin ; corps de vérin\}$ fournit la réponse à la question :

- Dans la solution 1, les actions mécaniques extérieures à Σ sont dues à la pesanteur et au capteur de pesée.
- Dans la solution 2, les actions mécaniques extérieures à Σ sont dues à la pesanteur, au capteur de pesée et au bâti par la fixation du corps de vérin : cette troisième interaction perturbe la mesure !

La solution 1 est correcte pour assurer le pesage du produit.

V-2 Evaluation de la course du vérin

Question 13 : Critère de détermination de la course du vérin

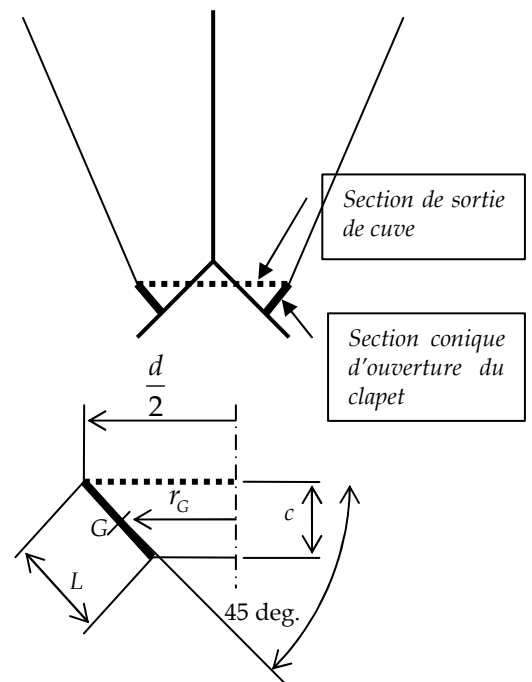
La section conique d'ouverture du clapet S_2 doit être supérieure ou égale à la section circulaire de sortie de la cuve S_1 .

Définition de la course

- $S_1 = \frac{\pi d^2}{4}$
- Par le théorème de Guldin, on détermine $S_2 = 2\pi L r_G$, avec $L = c\sqrt{2}$, où c est la course du vérin et $r_G = \frac{d-c}{2}$

On tire l'équation $c^2 - dc + \frac{d^2}{4\sqrt{2}} = 0$, aboutissant à la solution

$$c = \frac{d}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right)$$



V-3 Evaluation de l'effort du vérin

Question 14 : Effort de maintien du clapet en position « fermé »

Le théorème de la résultante statique appliqué à l'ensemble tige du vérin clapet, supposé en équilibre dans le référentiel terrestre galiléen, en projection sur l'axe vertical ascendant \vec{z} , conduit à la relation :

$$R = - \left[\int_{\text{clapet}} -p(M) \vec{n}(M) ds \right] \cdot \vec{z}$$

- avec :
- R valeur de l'effort que doit exercer le vérin
 - $p(M)$ pression hydrostatique des granulés en un point M du clapet
 - $\vec{n}(M)$ normale au plan tangent du clapet en M

Pour simplifier, on suppose la pression constante en tous points du clapet, soit : $p(M) = \rho g h$. Le calcul de R se ramène alors à l'application de la pression

$p(M)$ sur la surface projetée du clapet $S = \frac{\pi d^2}{4}$:

$$R = p(M)S, \text{ soit } \boxed{R = \rho g \frac{\pi h d^2}{4}}$$

Critique de la valeur obtenue

La valeur ainsi calculée est un majorant de la valeur réelle, pour les raisons suivantes :

- La pression hydrostatique des granulés sur le clapet est supposée constante et égale à la valeur maximale $\rho g h$ (on néglige le " dénivelé " du clapet).
- La pression réelle exercée par les granulés sur le clapet est inférieure à celle générée par le modèle de pression hydrostatique : les frottements et coincements des granulés entre eux et avec la paroi de la cuve limitent l'écoulement du produit et donc les efforts qu'il exerce sur le clapet.
- La surface projetée du clapet est surestimée, puisque la tige du vérin est supposée de taille négligeable.

