X 1991, Math. II (adapté)

Partie I : Des sommes de Riemann pour une intégrale généralisée.

On considère une fonction φ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, continue, réelle, décroissante, strictement positive.

1°) On suppose que φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

a) Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh)$ est convergente pour tout $h>0$.

b) Déterminer la limite de sa somme lorsque h tend vers 0.

2°) On suppose seulement que φ est intégrable sur $]0,1]$. On désigne par $E(x)$ la partie entière d'un réel x et on pose :

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1[\\ \sum\limits_{k=1}^{E(x)} \varphi(k) & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

$$c_k = \int_{k-1}^{k} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(k), \qquad \text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*$$

$$C = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k$$

$$\psi(x) = s(x) - \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + C, \qquad \text{pour tout } x \geqslant 0$$

a) Démontrer que C existe effectivement.

b) Vérifier que, si $\theta(x) = \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, $|\theta(x)| \leqslant 1$ pour $x \in]0,+\infty[$. *Indication : on pourra distinguer deux cas selon que $x<1$ ou $x \geqslant 1$.*

Partie II : Série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$.

On se propose d'étudier la fonction f somme de la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

On pose $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, de sorte que l'on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = A_n - A_{n-1}$, pour $n \geqslant 2$.

3°) Préciser le rayon de convergence de cette série, ainsi que la limite de sa somme lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

4°) Montrer que, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$.

Indication : on pourra poser $h = -\ln x$ et considérer la fonction $\varphi(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

5°) On définit une fonction s sur $[0,+\infty[$ par :

$$s(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in [0,1[\\ \sum\limits_{n=1}^{E(y)} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } y \in [1,+\infty[\end{cases}$$

Vérifier que l'on a

$$f(x) = h \int_0^{+\infty} s(y) e^{-hy}\,\mathrm{d}y$$

avec, comme plus haut, $h = -\ln x$.

6°) **a**) Montrer que $f(x) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$ admet une limite L lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

b) Montrer que $L = (\sqrt{2}+1)f(-1)$.

Partie III : Prolongement analytique de f.

7°) Déterminer l'ensemble des valeurs du nombre complexe x pour lesquelles la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{e^{u^2} - x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Sur l'ensemble ainsi mis en évidence, on pose :

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{e^{u^2} - x}.$$

8°) Montrer que f et g coïncident sur le disque ouvert $|x| < 1$. *Indication : on pourra développer $\dfrac{1}{1 - xe^{-u^2}}$.*

9°) Montrer que $g(x) + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\ln|x|}$ tend vers 0 lorsque x est réel et tend vers $-\infty$. *Indication : on pourra poser :*

$$x = -e^{t^2},\ t \geqslant 0, \quad \varphi_t(u) = \frac{1}{e^{(u^2-t^2)}+1},$$

puis minorer $\int_0^{+\infty} \varphi_t(u)\,\mathrm{d}u$ *par* $\int_0^{t-\varepsilon} \varphi_t(u)\,\mathrm{d}u$*, où* ε *est un nombre réel vérifiant* $0<\varepsilon<t$*, et majorer* $\int_0^{+\infty} \varphi_t(u)\,\mathrm{d}u$ *en l'écrivant sous la forme* $\int_0^t \varphi_t(u)\,\mathrm{d}u + \int_t^{+\infty} \varphi_t(u)\,\mathrm{d}u$*. Enfin, on montrera que* $\int_t^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-t^2}}{2t}$.

Partie IV : Comportement de f sur le cercle-unité.

On suppose maintenant x complexe de module 1, de la forme $x = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$. On pose :

$$\begin{cases} C(\theta) = \operatorname{Re} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\theta}{\sqrt{n}} \\ S(\theta) = \operatorname{Re} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\theta}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

10°) Justifier ces définitions. *Indication : on pourra introduire les sommes* $s_p(\theta) = \sum\limits_{n=1}^{p} \sin n\theta$ *et* $c_p(\theta) = \sum\limits_{n=1}^{p} \cos n\theta$

11°) a) Trouver une constante K telle que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\frac{k\pi}{4n} \geqslant K\sqrt{n}\,.$$

b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ converge-t-ellc uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$?

12°) Démontrer, en utilisant une méthode analogue à celle de la question 8° que $f(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$ pour $\theta \in]0, 2\pi[$. En déduire que

$$C(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} W_\theta(u)\,\mathrm{d}u$$

où on a posé :

$$W_\alpha(u) = \frac{e^{u^2}\cos\theta - 1}{e^{2u^2} - 2e^{u^2}\cos\theta + 1}\,.$$

13°) On fixe dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer les zéros de W_θ, et de sa derivée, le sens de variations de W_θ, sa valeur en 0 et sa limite lorsque u tend vers $+\infty$. Donner une esquisse de la courbe représentative.

14°) Déterminer la limite de $C(\theta)$ lorsque θ tend vers 0 par valeurs positives.