X M' 1992, Math. I

Le but de ce problème est d'étudier les sommes de séries trigonométriques de la forme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive, décroissante et de limite nulle. La première partie est consacrée à des propriétés générales ; la seconde à l'étude de la convergence uniforme de la série sur l'intervalle $[0,\pi]$; la troisième à l'étude de l'intégrale $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$; enfin, dans la quatrième, on examine un exemple particulier.

Partie I

Pour tout entier $n > 0$ on définit des fonctions E_n, A_n, f_n sur $[0,\pi]$ par :

$$E_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$$

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})E_k(x)$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx\ .$$

1°) a) Vérifier que l'on a $2\sin\frac{x}{2}E_n(x) = \cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x$.
b) Montrer que $f_n = A_n + b_{n+1}E_n$.
c) Établir les inégalités suivantes, lorsque $n < p$:

$$\sin\frac{x}{2}|A_n(x)| \leqslant b_1 - b_{n+1}$$

$$\sin\frac{x}{2}|A_p(x) - A_n(x)| \leqslant b_{n+1} - b_{p+1}$$

$$\sin\frac{x}{2}|f_p(x) - f_n(x)| \leqslant 2b_{n+1}\ .$$

2°) Montrer que (f_n) converge simplement sur l'intervalle $[0,\pi]$, et que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[\alpha,\pi]$, où $0 < \alpha < \pi$. Que peut-on dire de la fonction f, limite simple de la suite (f_n) ?
3°) a) Établir que, pour tout $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, on a $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$.
b) Montrer que, pour tout entier $m > 0$, la fonction $x \mapsto \sin mx f(x)$ est continue sur $[0,\pi]$, et calculer son intégrale sur cet intervalle.

Partie II

4°) On suppose que la suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, et on pose $\varepsilon_n = \operatorname{Sup}_{k\geqslant n}(kb_k)$. Pour tout $x \in]0,\pi]$ on note p la partie entière de $\frac{\pi}{x}$, de sorte que l'on a $p \leqslant \frac{\pi}{x} < p+1$.
a) Vérifier les inégalités suivantes :

$$|\sum_{k=n}^{n+p-1} b_k \sin kx| \leqslant \pi\varepsilon_n$$

$$|\sum_{k=n+p}^{\infty} b_k \sin kx| \leqslant 2\varepsilon_n\ .$$

b) Déduire de ce qui précède que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,\pi]$.
5°) Montrer que, réciproquement, si la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,\pi]$, la suite (nb_n) tend vers 0. *Indication : On pourra établir qu'il existe une constante C telle que, pour tout n,*

$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin\frac{k\pi}{4n} \geqslant Cnb_{2n}\ .$$

Partie III

On se propose ici d'établir l'équivalence des conditions :

(i) f est intégrable sur $]0,\pi[$

(ii) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{n} < +\infty$.

On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.
6°) a) Vérifier que l'on a :

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \pi(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})s_n + \frac{2\pi}{n}b_{n+1}\ .$$

Indication : On pourra écrire $f(x) = f_n(x) + f(x) - f_n(x)$ et utiliser la question **1°c**.
b) Montrer que (ii) implique (i).
7°) Déterminer la limite de $\frac{s_n}{n}$.

8°) On veut prouver que (i) implique (ii). On pose, pour tout $x \in]0,\pi]$: $F(x) = \int_x^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$, et $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k}$, ainsi que $\lambda = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{b_k}{k}$.

a) Vérifier que pour tout $x \in]0,\pi]$ l'on a :

$$\sigma_n = \lambda + F(x) + \sum_{k=1}^n b_k \int_0^x \sin kt\,\mathrm{d}t - \sum_{k=n+1}^\infty \frac{b_k}{k} \cos kx \,.$$

b) Montrer que $\left|\sum_{k=1}^n b_k \int_0^{\frac{1}{n}} \sin kt\,\mathrm{d}t\right|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

c) Montrer que $\sum_{k=n+1}^\infty \frac{b_k}{k} \cos \frac{k}{n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. *Indication : On pourra écrire* $\sin \frac{1}{2n} \cos \frac{k}{n}$ *comme demi-différence de deux sinus.*

d) Conclure.

Partie IV

Cette partie est consacrée à l'étude du comportement de f au voisinage de 0 dans le cas où $b_n = \frac{\ln n}{n}$.

9°) On note ψ une fonction continue, positive, décroissante et intégrable sur $]0,a]$. Vérifier que

$$\int_0^a \psi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0} \sum_{1\leqslant n\leqslant a/x} x\psi(nx)\,.$$

10°) Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs réelles, telle qu'il existe $a>0$ et $b>0$ vérifiant que :
(i) la fonction $x \mapsto \varphi(x)\sin x$ est positive, décroissante et intégrable sur $]0,a]$.
(ii) φ est positive, décroissante sur $[b,+\infty[$ et de limite nulle à l'infini.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer un nombre $A > 0$ tel que l'on ait pour tout $x \in]0,\pi]$:

$$\left|\sum_{k\geqslant \frac{A}{x}} x\varphi(kx)\sin kx\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Indication : on n'oubliera pas d'établir la convergence de cette série.

b) Montrer que les limites suivantes existent et ont la même valeur :

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \varphi(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^\infty x\varphi(nx)\sin nx\,.$$

11°) On pose $f(x) = \sum_{n=2}^\infty \frac{\ln n}{n} \sin nx$.

a) f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

b) Montrer que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, et trouver une constante c telle que $f(x) - c\ln x$ admette une limite finie en 0. *Indication : On pourra écrire* $\frac{\ln n}{n} = x\frac{\ln(nx)}{nx} - x\frac{\ln x}{nx}$ *et développer en série de Fourier la fonction g impaire, périodique de période 2π et telle que* $g(x) = \frac{\pi - x}{2}$ *sur* $]0,\pi[$.

c) f est-elle de carré intégrable ?