ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1992

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

La partie IV est indépendante des précédentes sauf en ce qui concerne les notations.

On désigne par $M(n, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel complexe des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients complexes, par F l'espace vectoriel réel constitué de ces mêmes matrices, par I la matrice identité et par a^* l'adjointe d'une matrice a.

On dit que a est hermitienne (resp. antihermitienne, resp. unitaire) si $a^* = a$ (resp. $a^* = -a$, resp. $aa^* = I$). On note $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{G}$, resp. $\mathcal{U}$) les ensembles de matrices ainsi définis.

Pour a et b dans $M(n, \mathbb{C})$, on pose :

$$[a, b] = ab - ba \quad ,$$

$$\exp a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \quad ,$$

$$(a \mid b) = \operatorname{Re} \operatorname{tr}(a^* b) \quad ,$$

où tr désigne la trace.

On rappelle que $\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba)$.

I

1. a) Vérifier que $(a, b) \mapsto (a \mid b)$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel F.

b) Montrer que, pour cette structure euclidienne, F est somme directe orthogonale des sous-espaces vectoriels $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$, dont on précisera les dimensions.

c) Soient a et b dans F et g dans $\mathcal{U}$. Comparer $(a \mid b)$ et $(ga \mid gb)$.

2. On note Π_1 le projecteur orthogonal de F sur $\mathcal{G}$.

Vérifier que, pour tout couple (a, b) d'éléments de $\mathcal{G}$, on a :

$$\Pi_1(ab) = \frac{1}{2}[a, b] \quad .$$

3. Comparer $\exp(\mathcal{G})$ et $\mathcal{U}$. (On admettra que les valeurs propres d'une matrice unitaire sont de module 1 et qu'une telle matrice est unitairement semblable à une matrice diagonale).

4. Soit a un élément fixé de F. Déterminer la dérivée de la fonction $t \mapsto \exp ta$ pour $t = 0$.

II

On appelle *courbe tracée sur* $\mathcal{U}$ toute application γ de classe C^∞ d'un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ dans F et dont l'image est contenue dans $\mathcal{U}$.

Soit g un élément de $\mathcal{U}$. On note Γ_g l'ensemble des courbes γ tracées sur $\mathcal{U}$ telles que 0 appartienne à J et $\gamma(0) = g$.

On désigne par T_g l'ensemble des vecteurs $\gamma'(0)$ lorsque γ décrit Γ_g.

5. a) Comparer T_I et $\mathcal{G}$.

b) Comparer, pour g dans $\mathcal{U}$, les ensembles T_g et $g\mathcal{G} = \{ ga \mid a \in \mathcal{G} \}$. En déduire que T_g est un sous-espace vectoriel de F.

6. On désigne par Π_g le projecteur orthogonal de F sur T_g. Vérifier que, pour tout a dans F, on a :

$$\Pi_g(a) = g\,\Pi_I(g^{-1}a) \quad .$$

7. On fixe une courbe γ tracée sur $\mathcal{U}$ et on pose, pour tout t dans J, $\alpha(t) = \gamma(t)^{-1}\gamma'(t)$. On considère une application X de classe C^∞ de J dans F vérifiant :

$$\forall t \in J \qquad X(t) \in T_{\gamma(t)} \quad .$$

On pose alors :

$$(D_\gamma X)(t) = \Pi_{\gamma(t)}(X'(t)) \quad .$$

Montrer que :

$$(D_\gamma X)(t) = \gamma(t)\left(\frac{1}{2}[\,\alpha(t), A(t)\,] + A'(t)\right)$$

où A est définie sur J par $X(t) = \gamma(t)\,A(t)$.

8. Etablir que la fonction $D_\gamma\,\gamma'$ est nulle sur J si et seulement si il existe a dans $\mathcal{G}$ et g_0 dans $\mathcal{U}$ tels que $\gamma(t) = (\exp ta)\,g_0$ sur J.

9. Interpréter géométriquement le résultat obtenu dans le cas où n = 1, et en donner une démonstration directe.

III

On pose :

$$\mathcal{G}^0 = \{ a \in \mathcal{G} \mid \mathrm{tr}\, a = 0 \} \quad ,$$
$$\mathcal{U}^0 = \{ g \in \mathcal{U} \mid \det g = 1 \} \quad ,$$

et on définit de façon analogue T_g^0 et Π_g^0 pour $g \in \mathcal{U}^0$, ainsi que D_γ^0 si γ est une courbe tracée sur $\mathcal{U}^0$.

10. Déterminer $\Pi_I^0(ab)$ pour a et b dans $\mathcal{G}$. On pourra admettre que, pour g dans $\mathcal{U}^0$ et a dans F, on a :

$$T_g^0 = g\,T_I^0 = g\,\mathcal{G}^0 \quad ,$$
$$\Pi_g^0(a) = g\,\Pi_I^0(g^{-1}a) \quad .$$

11. Trouver les courbes γ définies sur J, tracées sur $\mathcal{U}^0$ et vérifiant $D^0_\gamma \gamma' = 0$.

Dans la suite de la partie III on suppose $n = 2$.

12. On définit une application linéaire injective ϕ de $\mathbb{R}^4$ dans F par :

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + i\,x_2 & x_3 + i\,x_4 \\ -x_3 + i\,x_4 & x_1 - i\,x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{où } x = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

de sorte que $\mathcal{U}^0$ est l'image par ϕ de la sphère $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$.

a) Calculer $(\phi(x) \mid \phi(y))$ pour x et y dans $\mathbb{R}^4$.

b) Déterminer $\phi^{-1}\left(\exp t \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right)$.

13. Interpréter géométriquement le résultat de la question **11**, et en donner une démonstration directe. [On montrera d'abord que, pour tout a de $\mathcal{G}^0$, il existe g dans $\mathcal{U}^0$ et t dans $\mathbb{R}$ vérifiant $a = g \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{pmatrix} g^{-1}$].

IV

On suppose encore $n = 2$. On désigne par $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel complexe de $M(2, \mathbb{C})$ formé des matrices de trace nulle. Pour tout $u \in \mathcal{G}^0$ on désigne par $\alpha(u)$ l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ défini par :

$$\forall a \in \mathcal{V} \qquad \alpha(u)(a) = [u, a].$$

14. Calculer $(\alpha(u)(a) \mid b) + (a \mid \alpha(u)(b))$ pour a et b dans $\mathcal{V}$ et u dans $\mathcal{G}^0$.

15. On munit $\mathcal{V}$ de la base suivante :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer dans cette base la matrice de l'endomorphisme $\alpha(u)$, lorsque u est l'une des matrices

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Trouver les endomorphismes T de $\mathcal{V}$ qui commutent avec tous les $\alpha(u)$ lorsque u décrit $\mathcal{G}^0$.

17. Déterminer les sous-espaces vectoriels $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ tels que, pour tout a dans $\mathcal{W}$ et u dans $\mathcal{G}^0$, l'élément $\alpha(u)(a)$ appartienne à $\mathcal{W}$. [On pourra introduire le projecteur orthogonal de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$].