ÉCOLE POLYTECHNIQUE **OPTION M'**

CONCOURS D'ADMISSION 1994

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Ce problème est consacré à l'étude de diverses équations différentielles définies à partir de l'opérateur différentiel

$$A = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \operatorname{cotan} x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} .$$

On note Ω le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\pi\mathbb{Z}$. Pour tout entier k positif ou nul, on désigne par E_k^p (resp. E_k^i) l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, réelles, de classe $\mathcal{C}^k$, 2π-périodiques et paires (resp. impaires). On désigne par sin, cos, tan, cotan les fonctions trigonométriques usuelles.

Partie I

1°) Soit f une fonction de E_1^i ; vérifier que f est nulle sur $\pi\mathbb{Z}$ et que la fonction $x \longmapsto f(x) \operatorname{cotan} x$, définie sur Ω, se prolonge de façon unique en une fonction de E_0^p. Cette dernière fonction sera notée $f \operatorname{cotan}$ dans tout le problème ; on précisera sa valeur en un point $m\pi$, où $m \in \mathbb{Z}$.

2°) **a**) Soit f une fonction de E_k^p (resp. E_k^i) où $k \geqslant 1$; vérifier que f' appartient à E_{k-1}^i (resp. E_{k-1}^p) et que l'on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

b) Réciproquement, étant donnée une fonction g de E_{k-1}^i ou E_{k-1}^p, vérifiant $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, déterminer les fonctions f de E_k^p ou E_k^i admettant g pour dérivée.

Partie II

On désigne par A l'application linéaire $E_2^p \longrightarrow E_0^p$ définie par

$$A(f) = f'' + f' \operatorname{cotan} .$$

3°) **a**) Préciser la valeur de $A(f)$ en un point $m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

b) Établir une relation simple entre $A(f) \sin$ et $f' \sin$.

c) Déterminer le noyau de A.

d) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} A(f)(x) \sin x\,\mathrm{d}x$.

4°) **a**) Étant donnée une fonction $h \in E_0^p$ telle que $\displaystyle\int_0^{\pi} h(x) \sin x\,\mathrm{d}x = 0$, montrer qu'il existe une unique fonction $f \in E_2^p$ vérifiant $f(0) = 0$ et $A(f) = h$, et que f est donnée par

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\sin y} \int_0^y h(u) \sin u\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}y .$$

On justifiera cette écriture.

5°) On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de E_2^p ; on suppose que cette suite converge simplement vers une fonction f et que la suite $(A(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction h. Montrer que f appartient à E_2^p et que $A(f) = h$.

6°) Soit f une fonction de E_2^p, ξ (resp. η) un point de $[0, \pi]$ où f atteint son maximum (resp. minimum). Déterminer les signes de $A(f)(\xi)$ et de $A(f)(\eta)$.

Partie III

Dans cette partie, on s'intéresse au problème suivant : étant donné un réel $\mu > 0$ et une fonction h, étudier les fonctions f de E_2^p vérifiant l'équation différentielle

$$(A - \mu I)(f) = h \tag{1}$$

Pour toute fonction φ bornée sur $\mathbb{R}$ on posera

$$\|\varphi\| = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| .$$

7°) On fixe f dans E_2^p et on pose $h = (A - \mu I)(f)$. Comparer $\|f\|$ et $\dfrac{1}{\mu}\|h\|$.

[On pourra introduire le maximum et le minimum de f.]

8°) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note P_n le sous-espace vectoriel de E_2^p engendré par les fonctions $x \longmapsto \cos kx$ où $k = 0, 1, \ldots, n$.

a) Déterminer l'image de P_n par $A - \mu I$.

b) En déduire, à l'aide du 5°, que pour toute fonction $h \in E_1^p$, l'équation (1) admet une solution unique dans E_2^p.

Partie IV

On examine ici l'équation (1) dans un cas où $\mu < 0$.

9°) On note f une fonction de E_2^p vérifiant $(A+2I)(f)=0$ et $f(0)=0$. Montrer que f est identiquement nulle sur un voisinage de 0.
[On pourra introduire un réel $\alpha>0$ tel que $|f(x)|\leqslant|f(\alpha)|$ pour tout $x\in[0,\alpha]$, puis majorer $|f(\alpha)|$ à l'aide de la formule du 4°.]
10°) Trouver une fonction f_0 de E_2^p vérifiant $f_0(0)=1$ et $(A+2I)(f_0)=0$.
11°) Déterminer le noyau de $A+2I$.
12°) Donner la dimension de l'espace des solutions de l'équation $(A+2I)(f)=0$ dans l'espace de toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0,\pi[$; expliciter ces solutions et déterminer leur limite en 0.

Partie V

Dans cette cinquième partie, on se donne un réel $a>0$ et une fonction $h\in E_1^p$ vérifiant $h(x)>0$ pour tout x et on étudie les fonctions f de E_2^p vérifiant l'équation différentielle

$$A(f)+a=he^f \tag{2}$$

Dans ce but, on fixe deux réels m et M vérifiant $m\leqslant M$ et $h(x)e^m\leqslant a\leqslant h(x)e^M$ pour tout x, puis un troisième réel $\mu>0$. On définit par récurrence des fonctions φ_k de E_2^p de la façon suivante : $\varphi_0(x)=m$ pour tout x, et φ_{k+1} est l'unique élément de E_2^p vérifiant

$$(A-\mu I)(\varphi_{k+1})=he^{\varphi_k}-a-\mu\varphi_k\ .$$

13°) a) Montrer que l'on a $\varphi_1(x)\geqslant m$ pour tout x.
b) Déterminer un réel μ_0 tel que, si $\mu\geqslant\mu_0$, pour tout x, la suite $(\varphi_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ soit croissante et majorée par M.
14°) a) Démontrer que la suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction φ.
b) En déduire l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2) dans E_2^p.

♦ ♦
♦