ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1994

OPTION M'

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Ce problème est consacré à l'étude de certaines applications linéaires appelées « opérateurs de Hankel » (pour celles de la partie II) ou « de Laurent » (partie IV). On cherchera notamment à déterminer leur rang. On rappelle que le *rang* d'une application linéaire T entre espaces vectoriels de dimensions finies ou infinies est la dimension du sous-espace image de T, noté $\operatorname{Im} T$.

Attention : certaines notations comme E, u, H_u,... sont employées dans les diverses parties du problème avec des sens différents.

I

Dans cette partie on fixe un entier strictement positif k, on pose $E = \mathbb{C}^k$ et on note $(e_1, ..., e_k)$ sa base canonique. A toute suite finie $u = (u_0, ..., u_{2k-2})$ de nombres complexes, on associe l'endomorphisme H_u de E défini par

$$\forall j = 1, ..., k \qquad H_u(e_j) = u_{j-1}\, e_1 + u_j\, e_2 + ... + u_{j+k-2}\, e_k \ .$$

1.) Ecrire la matrice A_u de H_u dans la base ci-dessus.

2. a) Déterminer les suites u pour lesquelles le rang de H_u est égal à 1.

b) Pour une telle suite u, préciser le noyau de H_u et calculer la somme $\sum_{n=0}^{2k-2} u_n z^n$ où z est une variable complexe.

On note B la matrice de l'endomorphisme S de E qui transforme chaque e_j en e_{j+1} lorsque $j < k$ et en 0 lorsque $j = k$.

3. a) Calculer les matrices $A_u B - {}^tB A_u$ et $A_u {}^tB - B A_u$, où ${}^tB$ désigne la transposée de la matrice B.

b) Vérifier que $\operatorname{Im} H_u$ (resp. $\operatorname{Ker} H_u$) est stable par l'endomorphisme S^* de matrice ${}^tB$ si u_n est nul pour $n = k, ..., 2k-2$ (resp. $n = 0, ..., k-2$).

II

Dans cette deuxième partie on désigne par E l'ensemble formé des suites $x = (x_n)_{n\geq 0}$ où les x_n sont complexes et vérifient $\sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < +\infty$, et par E' le sous-ensemble de E formé des suites x ayant la propriété suivante : l'ensemble des n tels que $x_n \neq 0$ est fini.

Pour tout $p \geqslant 0$ on note e_p la suite définie par $e_{p,n} = 1$ si $n = p$ et $e_{p,n} = 0$ dans le cas contraire.

On admettra les résultats suivants :

• E est un espace vectoriel ;

• pour tout x et tout y dans E, la série $\sum_{n \geqslant 0} \bar{x}_n y_n$ est absolument convergente ;

• l'application $(x, y) \mapsto (x \mid y) = \sum_{n \geqslant 0} \bar{x}_n y_n$ est un produit scalaire sur E ;

• l'application $x \mapsto \|x\| = (x \mid x)^{1/2}$ est une norme sur E.

On notera B (resp. B') la boule unité de l'espace normé E (resp. E') et on admettra que B' est dense dans B. A tout élément $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ de E on associe l'application linéaire $H_u : E' \to E$ définie comme suit :

$$H_u(e_n) = \sum_{p \geqslant 0} u_{n+p} e_p \quad .$$

4.) Etant donné u dans E, x et y dans E', on pose

$$\Phi_u(x, y) = \sum_{n \geqslant 0} x_n (H_u(y))_n$$

$$Q_u(x) = \Phi_u(x, x) \quad .$$

On définit dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$A_1(u) = \sup_{x \in B'} |Q_u(x)|$$

$$A_2(u) = \sup_{x, y \in B'} |\Phi_u(x, y)|$$

$$A_3(u) = \sup_{x \in B'} \|H_u(x)\| \quad .$$

Démontrer que $A_1(u) = A_2(u) = A_3(u)$.

5.) On note C^0_{per} l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, complexes, continues et 2π-périodiques ; pour une telle fonction f et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose

$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \quad .$$

On se donne $f \in C^0_{\text{per}}$ et on pose, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \hat{f}(n)$. Vérifier que l'application H_u est bien définie, qu'elle est bornée sur B' (i.e. $A_3(u) \in \mathbb{R}$), et donner une majoration de $A_3(u)$ en fonction de $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

6.) Démontrer que, si u appartient à E et si le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} u_n z^n$ est strictement supérieur à 1 , alors H_u est bornée sur B'.

7. **a**) Déterminer les $u \in E$ pour lesquels H_u est de rang 1 .

b) Supposant que H_u est de rang 1, montrer qu'elle est bornée sur B'; calculer la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n z^n$ et préciser son rayon de convergence.

8.) On se donne un élément u de E et on suppose qu'il existe deux polynômes à coefficients complexes P et Q vérifiant les conditions suivantes :

- $Q(0) \neq 0$
- $\sum\limits_{n\geq 0} u_n z^n = P(z) / Q(z)$ dans un voisinage de 0 .

Démontrer que H_u est de rang fini.

9.) On désigne par S et S^* les endomorphismes continus de E définis respectivement par

$$S(e_n) = e_{n+1} \qquad \text{pour tout } n \geq 0$$

$$S^*(e_n) = \begin{cases} e_{n-1} \text{ si } n \geq 1 \\ 0 \text{ si } n = 0 \end{cases} .$$

Vérifier que, si T est une application linéaire de E' dans E, les conditions suivantes sont équivalentes :

- T est de la forme H_u avec $u \in E$
- $S^*(T(x)) = T(S(x))$ pour tout $x \in E'$.

10.) Soit $u \in E$ tel que H_u soit de rang fini. Construire un polynôme R vérifiant $R(S^*)\, H_u = 0$, et en déduire la réciproque de l'assertion du **8.**

III

Pour toute suite de nombres complexes $(x_n)_{n\in Z}$, l'expression $\sum\limits_{n\in Z} x_n$ signifiera $\sum\limits_{n\geq 0} x_n + \sum\limits_{n<0} x_n$.

Dans cette troisième partie on désigne par E l'espace vectoriel formé des suites $x = (x_n)_{n\in Z}$ où les x_n sont complexes et vérifient $\sum\limits_{n\in Z} |x_n|^2 < +\infty$, et par E' le sous-espace vectoriel de E formé des suites x ayant la propriété suivante : l'ensemble des n tels que $x_n \neq 0$ est fini.

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on note e_p la suite définie par $e_{p,n} = 1$ si $n = p$ et $e_{p,n} = 0$ dans le cas contraire.

A toute $f \in C^0_{\text{per}}$ on associe l'application linéaire $T_f : E' \to E$ définie par

$$T_f(e_n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} u_{p-n} e_p$$

où $u_n = \hat{f}(n)$.

11.) On fixe un élément x de E' et on pose

$$g(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{in\theta} \quad .$$

Comparer $T_f(x)$ et la suite des $(\widehat{fg})(n)$. En déduire que T_f est bornée sur la boule unité de E'.

12.) Déterminer les éléments f de C^0_{per} pour lesquels T_f est de rang fini.
[On rappelle à ce sujet que toute partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte.]

IV

On conserve les notations de la partie III ; on définit les endomorphismes P et D de E par

$$P(x)_n = \begin{cases} x_n \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$$

$$D = 2P - id_E \quad .$$

On se propose d'étudier les applications linéaires $\Delta_f = DT_f - T_f D$.

13.) Vérifier que l'on a

$$\Delta_f(e_n) = \begin{cases} -2 \sum_{p<0} u_{p-n} e_p & \text{si } n \geq 0 \\ 2 \sum_{p \geq 0} u_{p-n} e_p & \text{si } n < 0 \quad . \end{cases}$$

14.) Posant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g_n(\theta) = e^{in\theta}$, montrer que Δ_{g_n} est de rang fini et préciser ce rang.

15.) Déterminer les fonctions f pour lesquelles Δ_f est de rang 1 et décrire l'image de Δ_f.