Ce problème est consacré à l'étude du système différentiel

$$(1) \qquad \begin{cases} D_1 D_2 u - a\, D_1 u - b\, D_2 u = v \\ u(x_1, 0) = u(0, x_2) = 0 \quad \forall x_1, x_2 \end{cases}$$

au voisinage de 0 dans l'espace $\mathbb{R}^2$, a et b étant des constantes, v une fonction donnée et u la fonction inconnue. Pour y parvenir on utilisera certains espaces fonctionnels dont l'étude fait l'objet de la partie I. La partie III est consacrée à des calculs explicites.

***

On désigne par Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant le point 0, par x_1 et x_2 les coordonnées d'un point x de Ω, par $C^\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions complexes de classe C^∞ sur Ω. On note D_1 (resp. D_2) l'endomorphisme de $C^\infty(\Omega)$ défini par :

$$D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \qquad \left(\text{resp.} \quad D_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) .$$

Plus généralement, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ est un élément de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on désigne par D^α l'opérateur $(D_1)^{\alpha_1} (D_2)^{\alpha_2}$, autrement dit :

$$\forall f \in C^\infty(\Omega) \qquad D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial {x_1}^{\alpha_1}\, \partial {x_2}^{\alpha_2}} \qquad \text{avec } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 .$$

En particulier, $(D_1)^0$ et $(D_2)^0$ représentent l'identité.

Enfin pour toute fonction bornée f sur Ω on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| .$$

I

Etant donnés un réel $L > 0$ et une suite $M = (M_n)_{n \geq 0}$ de réels $M_n > 0$, on désigne par $E_M^L(\Omega)$, ou plus simplement E_M^L, l'ensemble des fonctions $u \in C^\infty(\Omega)$ possédant la propriété suivante : il existe un réel positif c tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on ait

$$\| D^\alpha u \|_\infty \leq c\, L^{|\alpha|} M_{|\alpha|} ;$$

on note alors $\| u \|_M^L$ la borne inférieure de ces nombres c.

1. Vérifier que E_M^L est un espace vectoriel complexe et que l'application $u \mapsto \| u \|_M^L$ est une norme sur E_M^L.

2. Etant donnés deux nombres L', L'' et deux suites M', M'' vérifiant $L' \leqslant L''$ et, pour tout n, $M'_n \leqslant M''_n$, comparer les espaces $E^{L'}_{M'}$ et $E^{L''}_{M''}$, puis les nombres $\| u \|^{L'}_{M'}$ et $\| u \|^{L''}_{M''}$ lorsque u est dans $E^{L'}_{M'}$.

3. Le nombre réel L étant fixé, déterminer la réunion des divers sous-espaces E^L_M, lorsque M décrit l'ensemble des suites de réels strictement positifs.

4. Montrer que, pour tout $\beta \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la restriction de D^β à E^L_M est une application linéaire continue de cet espace dans $E^L_{M'}$, où $M'_n = M_{n+|\beta|}$, et donner une majoration de sa norme.

5. Dans cette question, on fixe deux réels strictement positifs L et r ; on pose

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad |x_1| < r \} \quad ;$$

pour tout réel $h > 0$, on considère la fonction u_h définie par $u_h(x) = e^{h(x_1 + ix_2)}$.

a) Le réel h étant fixé, pour quelles suites M a-t-on $u_h \in E^L_M$ et $\| u_h \|^L_M \leqslant 1$?

b) Pour quelles suites M existe-t-il un réel $h > 0$ vérifiant ces deux conditions ?

6. Démontrer que l'espace E^L_M est complet pour la norme $\| \ \|^L_M$.

II

Dans cette partie II on fixe deux nombres complexes a et b et un réel r vérifiant $r > 0$ et $\frac{1}{r} > |a| + |b|$. On pose

$$\Omega_r = \{ x \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad |x_1| < r, |x_2| < r \} \quad .$$

Enfin pour toute suite M on définit M' par $M'_n = M_{n+1}$.

7. On fixe un réel $L \in \left] |a|+|b|, \frac{1}{r} \right]$ et une suite M croissante qui vérifie $M_0 = M_1$.

a) Montrer que le système

$$(2) \qquad \begin{cases} D_1 D_2 u = v \\ u(x_1, 0) = u(0, x_2) = 0 \qquad \forall x_1, x_2 \end{cases}$$

admet, pour toute fonction $v \in C^\infty(\Omega_r)$, une unique solution $u \in C^\infty(\Omega_r)$ et que, si on la note $T(v)$, T induit une application linéaire continue de $E^L_{M'}$ dans E^L_M, de norme $\leqslant L^{-2}$.

b) Donner une majoration de la norme de l'application linéaire

$$u \mapsto T(a\,D_1 u + b\,D_2 u)$$

de E^L_M dans lui-même.

c) Montrer que le système (1) admet, pour tout v dans $E^L_{M'}$, une unique solution u dans E^L_M.

8. Montrer que, pour tout v dans $C^\infty(\Omega_r)$, le système (1) admet une unique solution u dans $C^\infty(\Omega_r)$.

III

On considère ici le système (1) avec $a = 1$, $b = 0$, c'est-à-dire

$$(3) \qquad \begin{cases} D_1 D_2 u - D_1 u = v \\ u(x_1, 0) = u(0, x_2) = 0 \qquad \forall x_1, x_2 \,. \end{cases}$$

9. Calculer les dérivées partielles $a_\alpha = (D^\alpha u)(0)$ en fonction des $b_\alpha = (D^\alpha v)(0)$.

10. Calculer explicitement la solution u de (3) lorsque v est la fonction définie par :

$$v(x_1, x_2) = (1 - x_2 + 3\,x_1 x_2 - x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2^2)\, e^{x_1 x_2} \,.$$

♦ ♦
♦