OPTION MP

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

★★★

On se propose, dans ce problème, d'établir quelques propriétés des polynômes d'interpolation. On fixe un entier $n \geq 1$ et on désigne par

- E_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes à n variables réelles $x_1, \dots, x_n$ et à coefficients réels
- F_n le sous-espace de E_n formé des fonctions polynômes qui s'annulent dès que deux des variables sont égales, dans le cas où $n \geq 2$.
- ∂_i, $i = 1, \dots, n$, l'opérateur de dérivation partielle $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$
- S_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

On fait agir S_n sur E_n de la façon suivante :

$$\forall s \in S_n \quad \forall P \in E_n \quad T_s(P)(x_1, \dots, x_n) = P(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}) .$$

Première partie

1. Montrer que pour tout P appartenant à F_2, il existe un unique Q_P appartenant à E_2 tel que

$$P(x_1, x_2) = (x_1 - x_2) Q_P(x_1, x_2) .$$

On admettra que pour $n > 2$ et pour tout P appartenant à F_n, il existe un unique Q_P appartenant à E_n tel que

$$P(x_1, \dots, x_n) = [\prod_{i<j} (x_i - x_j)] Q_P(x_1, \dots, x_n) .$$

2. Comparer $Q_{T_s(P)}$ et $T_s(Q_P)$.

3. Supposant $n = 2$, exprimer $Q_P(x, x)$ en fonction de $(\partial_1 P)(x, x)$, puis de $(\partial_2 P)(x, x)$.

4. Supposant $n = 3$, exprimer $Q_P(x, x, y)$ en fonction de $(\partial_1 P)(x, x, y)$ pour $x \neq y$, puis $Q_P(x, x, x)$ en fonction de $(\partial_1 \partial_2^2 P)(x, x, x)$.

Deuxième partie

Dans cette partie on fixe un élément f de E_1 et on note P_f l'élément de F_n défini par

$$P_f(x_1, \dots, x_n) = \det(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$$

où

$$a_{i,1} = f(x_i) \quad , \quad a_{i,j} = x_i^{n-j} \qquad \text{pour } j = 2, \dots, n\ .$$

On écrira Q_f au lieu de Q_{P_f}.

5. Vérifier que, si $f(x) = x^{n-1}$, on a

$$P_f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)\ .$$

6. Trouver des éléments $A_1, \dots, A_n$ de E_n tels que

$$\forall f \in E_1 \qquad Q_f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i \frac{f(x_i)}{A_i(x_1, \dots, x_n)}$$

et démontrer leur unicité.

7. Montrer que Q_f est invariant par permutation des variables.

8. Déterminer Q_f lorsque $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Troisième partie

Dans cette partie, on fixe des nombres réels deux à deux distincts $a_1, \dots, a_n$ et une fonction f sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles.

9. Trouver un polynôme g_f de degré $\leq n - 1$ vérifiant $g(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$, et démontrer son unicité.

On notera $R_f(a_1, \dots, a_n)$ le coefficient de x^{n-1} dans g_f.

10. Supposant que f est un polynôme, comparer $R_f(a_1, \dots, a_n)$ et $Q_f(a_1, \dots, a_n)$.

11. Supposant $n = 2$ et k entier ≥ 0, donner une condition suffisante portant sur f pour que R_f se prolonge en une fonction de classe C^k sur $\mathbf{R}^2$. [On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1.]

Quatrième partie

Dans cette partie, on fixe des nombres réels deux à deux distincts $a_1, \ldots, a_n$ et des entiers positifs ou nuls $r_1, \ldots, r_n$; on pose :

$$r = \sum_{i=1}^{n} (r_i + 1) - 1 .$$

On note G l'espace vectoriel des fonctions polynômes à une variable, à coefficients réels, de degré au plus r.

12. On se propose d'étudier les familles de polynômes $P_{i,j}$ de G, avec $i = 1, \ldots, n$ et $j = 0, 1, \ldots, r_i$, vérifiant

$$P_{i,j}^{(k)}(a_\ell) = \delta_{i,\ell}\delta_{j,k} \quad \text{pour } i, \ell = 1, \ldots, n \quad ; \quad j = 0, 1, \ldots, r_i \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, r_\ell$$

où le δ désigne le symbole de Kronecker.

a) Démontrer l'unicité d'une telle famille $(P_{i,j})$.

b) Montrer qu'une telle famille $(P_{i,j})$, si elle existe, est une base de G.

c) Démontrer l'existence d'une telle famille $(P_{i,j})$.

d) Déterminer explicitement la famille $(P_{i,j})$ dans le cas où $n = 2$ et $r_1 = r_2 = 1$.

e) Montrer que, pour tout polynôme $f \in E_1$, il existe un unique polynôme $g_f \in G$ vérifiant $g_f^{(k)}(a_\ell) = f^{(k)}(a_\ell)$ pour $\ell = 1, \ldots, n$ et $k = 0, 1, \ldots, r_\ell$.

13. On suppose maintenant $n = 2$ et $r_1 = r_2 = 1$. Pour tout entier $p \geq 0$ et tout réel x on pose $\phi_p(x) = x^p$. Pour tout $f \in E_1$ et tous réels x_1, x_2 on pose

$$D_f(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} f(x_1) & \phi_2(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_0(x_1) \\ f'(x_1) & \phi_2'(x_1) & \phi_1'(x_1) & \phi_0'(x_1) \\ f(x_2) & \phi_2(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_0(x_2) \\ f'(x_2) & \phi_2'(x_2) & \phi_1'(x_2) & \phi_0'(x_2) \end{pmatrix} .$$

a) Vérifier que l'on a $(\partial_1^k D_f)(x, x) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

b) En déduire l'existence d'un polynôme $\Delta_f \in E_2$ tel que

$$D_f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^4 \Delta_f(x_1, x_2) .$$

c) Comparer $\Delta_f(a_1, a_2)$ et le coefficient de x^3 dans le polynôme g_f.