ÉCOLE POLYTECHNIQUE OPTION **MP**

CONCOURS D'ADMISSION 1998

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

Le but de ce problème est de démontrer quelques propriétés de certaines séries de fonctions et de certaines intégrales qui s'y ramènent.

Première partie

Dans cette partie on désigne par p un entier positif ou nul.

1. Vérifier que le rayon de convergence R_p de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^p}$, où z est un nombre complexe, est égal à 1.

On pose $L_p(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^p}$ pour tout x réel tel que $|x| < 1$.

2. Calculer $L_0(x)$ et $L_1(x)$.

3. Exprimer $L'_p(x)$ à l'aide de $L_{p-1}(x)$.

4. Pour quelles valeurs de p a-t-on $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p} < +\infty$?

Dans ce cas on notera cette somme $L_p(1)$.

5. On suppose $p = 1$, on note z un nombre complexe de module 1 et on pose $A_0(z) = 0$ et, pour $n \geq 1$, $A_n(z) = z + z^2 + \ldots + z^n$.

a) Etant donnés deux entiers q et r vérifiant $1 \leq q \leq r$, trouver pour $n = q-1, \ldots, r$ des nombres complexes u_n indépendants de z, tels que l'on ait

$$\sum_{q\leq n\leq r} \frac{z^n}{n} = \sum_{q-1\leq n\leq r} A_n(z)\, u_n \,.$$

b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ est convergente pour tout z vérifiant $|z| \leq 1$, $z \neq 1$, et indiquer des ensembles sur lesquels la convergence est uniforme.

Deuxième partie

6. Vérifier que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}$, où z est un nombre complexe donné, est absolument convergente si et seulement si $\operatorname{Re} z > 1$.

7. On définit une fonction réelle f sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$.

Montrer que f est de classe C^∞ et écrire sa dérivée k-ième sous la forme d'une série.

8. On fixe $x \in]1, +\infty[$ et $h \in \mathbb{R}$; pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ on pose

$$u_{n,k} = \frac{(-h \ln n)^k}{k!\, n^x} .$$

a) Dire pour quelles valeurs de h la suite double $(u_{n,k})$ est sommable.

b) Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor $\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x)\, h^k}{k!}$ est au moins égal à $x - 1$, et comparer la somme de cette série à $f(x + h)$, lorsque $|h| < x - 1$.

Troisième partie

Dans cette partie on fixe un entier $k > 0$ et des entiers $p_1, \ldots, p_k \geq 0$. On pose

$$I = \{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid 0 < n_1 < \ldots < n_k\} .$$

Enfin, pour tout $(n_1, \ldots, n_k) \in I$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$v_{n_1,\ldots,n_k}(z) = \frac{z^{n_k}}{n_1^{p_1} \ldots n_k^{p_k}} .$$

9. Montrer que, si $|z| < 1$, la famille définie sur I par

$$(n_1, \ldots, n_k) \mapsto v_{n_1,\ldots,n_k}(z)$$

est sommable, et écrire sa somme $L_{p_1,\ldots,p_k}(z)$ sous la forme d'une série entière $\sum_n a_n z^n$. [On laissera a_n sous forme d'une somme finie.]

10. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

11.a) Montrer que, pour p entier ≥ 2 et m entier ≥ 1, on a

$$\frac{1}{(p-1)(m+1)^{p-1}} \leq \sum_{n>m} \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{(p-1)m^{p-1}}\,.$$

b) Pour quelles suites $(p_1, \ldots, p_k)$ la somme $\displaystyle\sum_{(n_1,\ldots,n_k)\in I} \frac{1}{n_1^{p_1}\ldots n_k^{p_k}}$ est-elle finie ? On la notera alors $L_{p_1,\ldots,p_k}(1)$.

[On pourra procéder par récurrence sur k].

12. Peut-on utiliser la méthode de la question **5** pour étudier $L_{1,1}$?

Quatrième partie

13. Vérifier que pour $0 \leq t \leq 1$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{dy}{y-1}$ est intégrable sur $[0,t]$ et exprimer son intégrale $\Phi_1(t)$ sur $[0,t]$ en fonction de $L_2(t)$.

14. Vérifier que pour $0 \leq t \leq 1$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{\Phi_1(y)dy}{y-1}$ est intégrable sur $[0,t]$ et exprimer son intégrale $\Phi_2(t)$ sur $[0,t]$ en fonction de $L_{2,2}(t)$.

15. Montrer que la formule de récurrence

$$\Phi_{k+1}(t) = \int_0^t \frac{1}{x}\left[\int_0^x \frac{\Phi_k(y)dy}{y-1}\right]dx$$

définit effectivement une suite de fonctions sur $[0,1]$, que l'on exprimera à l'aide des diverses fonctions $L_{p_1,\ldots,p_k}$.

⋆ ⋆
⋆