ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2000

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

On se propose d'étudier certaines équations différentielles, d'abord dans le cadre des séries entières, ensuite dans celui des fonctions indéfiniment dérivables.

Notations des parties I, II et III.

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ formé des suites de nombres complexes $u = (u_k)_{k=1,2,\ldots}$, et par e_n la suite u où $u_k = 1$ si $k = n$ et 0 si $k \neq n$. Pour tout u de E on note $r(u)$ le rayon de convergence, éventuellement nul ou infini, de la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} u_k\, x^k$; pour tout nombre réel $R > 0$ on note E_R l'ensemble des u de E tels que $r(u) \geq R$; enfin on note E_+ l'ensemble des $u \in E$ tels que $r(u) > 0$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) Un élément u de E appartient à E_+ si et seulement s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que l'on ait $|u_k| \leq M^k$ pour tout k ; dans ce cas on a $r(u) \geq \dfrac{1}{M}$.

b) Si, pour un réel $M > 0$, on a $|u_k| \geq M^k$ pour tout k, on a $r(u) \leq \dfrac{1}{M}$.

2. Déterminer un nombre réel $\gamma > 0$ tel que l'on ait, pour tout $k \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2(k-i)^2} \leq \frac{\gamma}{k^2}$$

Deuxième partie

On fixe un nombre complexe a et on désigne par A_a l'endomorphisme de E défini par $(A_a u)_k = (k+a)u_k$ pour tout k.

3. Déterminer le noyau et l'image de A_a.

4. Vérifier que, si a n'est pas un entier strictement négatif, pour tout $R > 0$, la restriction de A_a à E_R est un isomorphisme de ce sous-espace sur lui-même.

Troisième partie

On définit le produit $u * v$ de deux éléments u et v de E par $(u * v)_1 = 0$ et

$$(u * v)_k = \sum_{i=1}^{k-1} u_i \, v_{k-i} \quad \text{pour} \quad k \geq 2\ .$$

On fixe deux nombres complexes a et c, a n'étant pas un entier strictement négatif ; on note T l'application de E dans lui-même définie par $Tu = A_a u + c\, u * u$.

5.a) Supposant que $Tu = v$ où u et v sont des éléments de E, écrire u_1 en fonction de v_1, puis u_k en fonction de v_k, $u_1, \ldots, u_{k-1}$ pour $k \geq 2$.

b) L'application T est-elle injective ? surjective ?

6. On se propose de démontrer que la restriction de T à E_+ est une bijection de ce sous-espace sur lui-même.

a) Vérifier que $T(E_+)$ est inclus dans E_+.

b) Soit $u \in E$ tel que $v = Tu \in E_+$. Démontrer l'existence de nombres réels δ, M, M_0, M_1 strictement positifs satisfaisant les conditions suivantes :

(1) $\quad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ |k+a| \geq \delta$

(2) $\quad 2|c|\gamma\, M_0 \leq \delta$, où γ est la constante introduite à la question **2.**

(3) $\quad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ |v_k| \leq M^k$

(4) $\qquad M \leq \delta\, M_0 M_1$

(5) $\qquad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ 2k^2 M^k \leq \delta\, M_0 M_1^k$.

c) Comparer $|u_k|$ et $\dfrac{M_0 M_1^k}{k^2}$.

d) Conclure.

7. *Exemple.* On prend $a = 0$, $c = -1$, $v = \lambda\, e_1$ où $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, et on suppose encore $Tu = v$.

a) Montrer que u_k est de la forme $u_k = \alpha_k \lambda^k$ avec $\alpha_k \in \mathbf{R}_+^*$ et

$$2^{1-k} \leq \alpha_k \leq 1 \quad \text{pour tout } k\ .$$

b) En déduire un encadrement de $r(u)$.

Quatrième partie

Pour tout intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ on note $C^\infty(I)$ l'espace des fonctions complexes indéfiniment dérivables sur I. On désigne par a un nombre réel non nul et par D l'endomorphisme de $C^\infty(I)$ défini par

$$(Df)(t) = t\, f'(t) + a\, f(t)\ .$$

8. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $Df = 0$ sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, et préciser leurs intervalles de définition.

9. Dire pour quelles valeurs de a il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, vérifiant $Df = 0$, nulle en 0 mais non identiquement nulle.

Dans la suite, on prend pour I un intervalle de la forme $]0, \theta[$ avec $\theta \in]0, +\infty]$. On désigne par t_0 un point de I, par g une fonction de $C^\infty(I)$, et enfin par α un nombre complexe.

10. Déterminer la solution maximale de l'équation différentielle $Df = g$ sur I telle que $f(t_0) = \alpha$ [on pourra introduire la fonction

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} s^{a-1}\, g(s) ds\,]$$

11. On suppose dans cette question que a n'est pas un entier strictement négatif et que g est la restriction à I de la somme d'une série entière $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} v_k\, t^k$ ayant un rayon de convergence $\geq \theta$.

Déterminer α de façon que f soit aussi la restriction à I de la somme d'une série entière ayant un rayon de convergence $\geq \theta$.

12. On se propose d'étudier le comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers 0, sous l'hypothèse que $g(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

a) Supposant $a < 0$, déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 0.

b) On suppose maintenant que $a > 0$ et que la fonction g, prolongée par 0 au point 0, admet une dérivée à droite en ce point. Trouver un nombre α tel que $f(t)$ tende vers 0 lorsque t tend vers 0.

* *
*