

CONCOURS D'ADMISSION 2004

## DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

Courbures des surfaces dans l'espace  $\mathbf{R}^3$ 

Ce problème propose une étude des surfaces de l'espace  $\mathbf{R}^3$  et de leurs courbures totale et moyenne. Pour tout entier  $n > 0$ , l'espace  $\mathbf{R}^n$  sera muni de son produit scalaire et de sa norme usuels notés respectivement  $(\cdot|\cdot)$  et  $\|\cdot\|$ . La première partie est consacrée à des préliminaires algébriques.

## Première partie

**1.** Soient  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  des éléments de  $\mathbf{R}^{n+1}$ ,  $(x_j^{(i)})_{j=1, \dots, n+1}$  les composantes de  $x^{(i)}$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Pour tout  $k = 1, \dots, n+1$  on note  $V_k$  le produit par  $(-1)^{k+1}$  du déterminant de la matrice  $(x_j^{(i)})$  où  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n+1$ . On note  $V$  le vecteur de  $\mathbf{R}^{n+1}$  de composantes  $V_k$ .

**1.a)** Montrer que  $V$  est orthogonal à tous les  $x^{(i)}$ .

**1.b)** Comparer les conditions suivantes :

**i)**  $V = 0$

**ii)** la famille  $(x^{(i)})_{i=1, \dots, n}$  est liée.

**1.c)** Exprimer en fonction de  $\|V\|$  le déterminant des  $n+1$  vecteurs  $V, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^{n+1}$ .

**2.a)** Montrer que, pour tout  $n$ -uplet de vecteurs  $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  linéairement indépendants, il existe un unique vecteur  $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  ayant les propriétés suivantes

**i)**  $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  est de norme 1 et orthogonal à tous les  $x^{(i)}$

**ii)** le déterminant des  $n+1$  vecteurs  $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^{n+1}$  est strictement positif.

**2.b)** Vérifier que, pour toute rotation  $R$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$ , on a

$$W(R(x^{(1)}), \dots, R(x^{(n)})) = R(W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})) .$$

**3)** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbf{R}^n$ ,  $Q$  la matrice de coefficients  $q_{i,j} = (e_i | e_j)$ .

**3.a)** Montrer que  $Q$  est inversible et diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

**3.b)** Soit  $v$  un vecteur de  $\mathbf{R}^n$ , de coordonnées  $v_i$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Exprimer le vecteur ligne  $(v_1, \dots, v_n)$  en fonction de  $Q$  et du vecteur ligne  $((v | e_1), \dots, (v | e_n))$ .

Dans la suite du problème, on désigne par  $U$  une partie ouverte de  $\mathbf{R}^n$ , par  $u = (u_1, \dots, u_n)$  un élément quelconque de  $U$ , par  $F$  une application de classe  $C^2$  de  $U$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ , par  $\partial_i F$  (resp.  $\partial_i \partial_j F$ ) ses dérivées partielles d'ordre 1 (resp. 2). On suppose que les  $n$ -vecteurs  $(\partial_i F)(u)$  sont linéairement indépendants pour tout  $u$ , et on pose  $W(u) = W((\partial_1 F)(u), \dots, (\partial_n F)(u))$ .

**4.a)** Vérifier que l'application  $u \mapsto W(u)$  est de classe  $C^1$ .

**4.b)** Comparer  $((\partial_k W)(u) | (\partial_i F)(u))$  et  $(W(u) | (\partial_i \partial_k F)(u))$ .

**4.c)** Démontrer l'existence et l'unicité de nombres réels  $a_{i,j}(u)$  tels que l'on ait

$$(\partial_i W)(u) = \sum_j a_{i,j}(u) (\partial_j F)(u) .$$

**4.d)** On note respectivement  $A(u), S(u), Q(u)$  les matrices de coefficients respectifs  $a_{i,j}(u), (W(u) | (\partial_i \partial_j F)(u)), ((\partial_i F)(u) | (\partial_j F)(u))$ . Vérifier que  $A(u) = -S(u)Q(u)^{-1}$ .

## Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on suppose  $n = 2$ ; on a donc un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^2$  et une application  $F$  de classe  $C^2$  de  $U$  dans  $\mathbf{R}^3$  telle que les vecteurs  $(\partial_1 F)(u)$  et  $(\partial_2 F)(u)$  soient linéairement indépendants pour tout  $u$  de  $U$ . On a en outre

$$W(u) = \frac{(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)}{\|(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)\|}$$

où  $\wedge$  désigne le produit vectoriel dans  $\mathbf{R}^3$ . On pose

$$K(u) = \det A(u) , \quad H(u) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A(u)$$

où  $A(u)$  est la matrice définie à la question **4.d)**. On note  $F_i(u), i = 1, 2, 3$ , les composantes de  $F(u)$ ; on suppose que  $U$  contient le point 0 et on fait l'étude de la surface  $F(U)$  au voisinage du point  $F(0)$ .

**5.** Soit  $R$  une rotation de  $\mathbf{R}^3$ . Montrer que les objets  $\hat{K}(0)$  et  $\hat{H}(0)$  associés à l'application  $\hat{F} = R \circ F$  sont égaux respectivement à  $K(0)$  et  $H(0)$ .

6. On suppose que, pour  $u$  suffisamment voisin de 0,  $F(u)$  est de la forme

$$F(u) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$$

avec  $f(0) = (\partial_1 f)(0) = (\partial_2 f)(0) = 0$ .

6.a) Calculer  $K(0)$  et  $H(0)$  en fonction des nombres

$$r = (\partial_1 \partial_1 f)(0), \quad s = (\partial_1 \partial_2 f)(0), \quad t = (\partial_2 \partial_2 f)(0).$$

6.b) (Cas d'un cylindre) On suppose que  $f(u_1, u_2)$  est fonction de  $u_1$  seul, soit  $f(u_1, u_2) = g(u_1)$ . Exprimer  $H(0)$  en fonction de la courbure de la courbe  $\Gamma$ , intersection du cylindre avec le plan  $x_2 = 0$ .

7.) Dans cette question, on considère le cas d'une surface de révolution :

$$F(u) = (f(u_1) \cos u_2, f(u_1) \sin u_2, u_1)$$

où  $f$  est une fonction strictement positive de classe  $C^2$  définie sur un intervalle  $I$ .

7.a) Dire pour quelles valeurs de  $u$  les vecteurs  $(\partial_1 F)(u)$  et  $(\partial_2 F)(u)$  sont linéairement indépendants.

7.b) Vérifier que

$$A(u) = f(u_1)^{-1} (1 + f'(u_1)^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} f(u_1) f''(u_1) & 0 \\ 0 & -(1 + f'(u_1)^2) \end{pmatrix}.$$

7.c) Donner une fonction  $f$  élémentaire pour laquelle  $H(u)$  est nul pour tout  $u$ .

7.d) Montrer que, pour tous nombres réels  $\alpha$  et  $\beta, \alpha > 0$ , il existe  $f$  satisfaisant

$$H(u) = 0 \text{ pour tout } u, \quad f(0) = \alpha, \quad f'(0) = \beta.$$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

7.e) Calculer  $K(u)$  pour une telle fonction  $f$ .

8.) Indiquer, sans aucun calcul, des surfaces pour lesquelles  $K(u)$  et  $H(u)$  sont des constantes.

### Troisième partie

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'effet d'un changement de paramétrage sur les fonctions  $H$  et  $K$ .

Dans la situation du début de la deuxième partie on note  $\frac{\partial F}{\partial u}$  la matrice (jacobienne) de coefficients  $(\frac{\partial F}{\partial u})_{i,j} = \partial_j F_i$ . Notation analogue pour  $\frac{\partial W}{\partial u}$ .

9. Vérifier que  $\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} {}^t A(u)$ .

On se donne maintenant un difféomorphisme  $\Phi$  de  $U$  sur un autre ouvert  $\tilde{U}$  de  $\mathbf{R}^2$  et on pose  $\Psi = \Phi^{-1}$ . Pour tout  $u \in U$  on écrira aussi  $\tilde{u} = \Phi(u)$ ; on pose  $\tilde{F}(\tilde{u}) = F(u)$ , c'est-à-dire  $\tilde{F} = F \circ \Psi$ , et on note  $\tilde{W}(\tilde{u}), \tilde{A}(\tilde{u}), \tilde{K}(\tilde{u}), \tilde{H}(\tilde{u})$  les objets définis à partir de  $\tilde{F}$  et  $\tilde{u}$  comme  $W(u), A(u), K(u), H(u)$  l'ont été à partir de  $F$  et  $u$ . On suppose  $U$  connexe par arcs.

10.a) Exprimer  $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$  en fonction de  $\frac{\partial F}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$ , puis  $(\partial_1 \tilde{F})(\tilde{u}) \wedge (\partial_2 \tilde{F})(\tilde{u})$  en fonction de  $(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)$  et  $\det \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$ .

10.b) Montrer qu'il existe  $\varepsilon \in \{1, -1\}$  tel que l'on ait  $\tilde{W}(\tilde{u}) = \varepsilon W(u)$  pour tout  $u \in U$ .

10.c) Exprimer  $\tilde{A}(\tilde{u})$  en fonction de  $\varepsilon, A(u)$  et  $\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$ .

10.d) Comparer  $\tilde{H}(\tilde{u})$  et  $H(u), \tilde{K}(\tilde{u})$  et  $K(u)$ .

\* \*  
\*