ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION P'

CONCOURS D'ADMISSION 1991

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

L'objet de ce problème est l'étude sur l'intervalle $[0,1]$ de l'équation différentielle

(E) $$\phi^{(IV)} + 2\lambda\phi'' + \phi = \psi$$

où λ est un paramètre réel, assortie de diverses conditions aux limites : conditions d'annulation à la partie III, conditions de périodicité à la partie IV. Les parties I et II sont consacrées à des préliminaires utilisés dans la suite.

On désigne par I l'intervalle $[0,1]$, par $C^k(I)$, $k = 0, 1, \ldots$, l'ensemble des fonctions réelles de classe C^k sur I, et par $C^2_0(I)$ l'ensemble des f de $C^2(I)$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$. On munit $C^0(I)$ du produit scalaire usuel :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

et de la norme correspondante :

$$\| f \| = (f \mid f)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour toute f de $C^0(I)$ on définit $\mathcal{I}(f)$ et $\mathcal{I}^2(f)$ par :

$$\mathcal{I}(f)(x) = \int_0^x f(y)\, dy \quad , \quad \mathcal{I}^2(f) = \mathcal{I}(\mathcal{I}(f)) \quad .$$

PARTIE I

On note $C^2_{0,0}(I)$ l'ensemble des éléments u de $C^2_0(I)$ vérifiant en outre $u'(0) = 0$ et $u'(1) = 0$. On se propose de démontrer que, pour un élément f de $C^0(I)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

a - $(f \mid u'') = 0 \qquad \forall\, u \in C^2_{0,0}(I)$

b - f est affine, i.e. de la forme $f(x) = \lambda x + \mu$ où λ et μ sont des réels.

1. Vérifier que **b** - implique **a** -.

2. Étant donnée $f \in C^0(I)$, trouver des scalaires λ et μ tels que $f(x) - \lambda x - \mu$ soit la dérivée seconde d'une fonction de $C^2_{0,0}(I)$.

3. Conclure.

PARTIE II

On se propose ici de démontrer que les conditions

$$f \in C^0(I) \quad , \quad g \in C^0(I) \quad , \quad h \in C^0(I)$$

$$(f \mid u'') + (g \mid u') + (h \mid u) = 0 \qquad \forall\, u \in C^2_0(I)$$

A SUIVRE

impliquent les suivantes :

$$\begin{cases} f - \mathcal{I}(g) + \mathcal{I}^2(h) \text{ est affine} \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

1. Trouver une constante k telle que l'on ait :

$$\int_0^1 (f(x) - \mathcal{I}(g)(x) + \mathcal{I}^2(h)(x))\, u''(x)\, dx = k\, u'(1) \qquad \forall u \in C_0^2(I)$$

2. Conclure.

PARTIE III

Cette partie est consacrée à l'étude de l'équation différentielle (E) avec conditions d'annulation aux limites ; on va ramener le problème posé à un « problème variationnel » que l'on résoudra seulement partiellement : on démontrera dans certains cas l'unicité de la solution, mais pas son existence. A la dernière question on traitera un problème de valeurs propres et on obtiendra des formules explicites.

On se donne une fonction ψ de $C^0(I)$ et un réel λ , et on cherche ϕ dans $C^4(I)$ vérifiant les conditions

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \phi^{(IV)} + 2\lambda\phi'' + \phi = \psi \\ \phi(0) = \phi(1) = \phi''(0) = \phi''(1) = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que (I) implique :

$$\text{(II)} \qquad (\phi'' \mid u'') - 2\lambda(\phi' \mid u') + (\phi - \psi \mid u) = 0 \qquad \forall u \in C_0^2(I)\,.$$

2. Démontrer que, réciproquement, toute fonction ϕ de $C_0^2(I)$ vérifiant (II) est de classe C^4 et vérifie (I).

3. Vérifier que, pour toute $\phi \in C_0^2(I)$, on a :

$$\| \phi' \|^2 = -(\phi'' \mid \phi) \leq \frac{1}{2}(\| \phi'' \|^2 + \| \phi \|^2) \quad .$$

Préciser dans quel cas on a l'égalité.

Montrer que $\| \phi \|^2 \leq \| \phi' \|^2$. [On pourra écrire $\phi(x) = \int_0^x \phi'(t)\, dt$.]

On définit une fonction U sur $C_0^2(I)$ par :

$$U(\phi) = \frac{1}{2}\| \phi'' \|^2 - \lambda \| \phi' \|^2 + \frac{1}{2}\| \phi \|^2 - (\psi \mid \phi)$$

On suppose $\lambda < 1$ *dans les questions* **4., 5., 6.** .

4. Montrer que U est bornée inférieurement.

Tournez la page S.V.P.

5. On fixe ϕ et u dans $C_0^2(I)$ et on définit une fonction $h_{\phi,u}$ d'une variable réelle par :

$$h_{\phi,u}(t) = U(\phi + t\,u)$$

Calculer les dérivées première et seconde de cette fonction.

6. Déduire de ce qui précède que, pour toute ϕ_0 de $C_0^2(I)$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a - ϕ_0 vérifie (II)

b - $h'_{\phi_0,u}(0) = 0 \quad \forall\, u \in C_0^2(I)$

c - $U(\phi) > U(\phi_0)$ pour toute ϕ de $C_0^2(I)$ distincte de ϕ_0 .

On suppose maintenant $\psi = 0$.

7. Montrer que si (I) admet une solution non nulle, on a $\lambda > 1$.

On suppose maintenant $\lambda > 1$.

8. Déterminer des nombres réels α et β tels qu'une fonction ϕ de classe C^4 vérifie

$$\phi^{(IV)} + 2\lambda\,\phi'' + \phi = 0$$

si et seulement si la fonction $\omega = \phi'' + \alpha\,\phi$ vérifie $\omega'' + \beta\,\omega = 0$. Déterminer les nombres λ pour lesquels (I) admet des solutions non nulles. Expliciter ces solutions à l'aide de fonctions élémentaires.

PARTIE IV

On reprend l'équation différentielle (E) , mais en se plaçant dans le cadre des fonctions périodiques et à valeurs complexes.

Pour tout entier $k > 0$ on note C^k_{per} l'ensemble des f de $C^k(I\,,\mathbf{C})$ vérifiant :

$$f^{(m)}(0) = f^{(m)}(1) \qquad \text{pour } m = 0, 1, ..., k-1$$

Pour toute f de $C^0(I\,,\mathbf{C})$ et tout entier relatif n , on pose :

$$\gamma_n(f) = \int_0^1 e^{-2\pi i n x}\, f(x)\, dx$$

On se donne ψ dans $C^0(I\,,\mathbf{C})$, λ complexe, et on cherche ϕ dans C^4_{per} vérifiant :

$$\phi^{(IV)} + 2\lambda\,\phi'' + \phi = \psi$$

1. Calculer $\gamma_n(\psi)$ en fonction de $\gamma_n(\phi)$.

2. Résoudre le problème ci-dessus dans le cas où $\psi = 0$.

3. Résoudre le problème ci-dessus dans le cas où ψ appartient à C^1_{per} , en donnant sa solution sous la forme de la somme d'une série.

♦ ♦
♦

FIN