ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION P'

CONCOURS D'ADMISSION 1992

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Le but de ce problème est d'étudier une fonction g, définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, vérifiant :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

et

$$x^2 g'(x) + g(x) = x \qquad \forall x > 0 .$$

I

1. a) Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[^2$ par :

$$\varphi(x, t) = \frac{e^{-t}}{1 + xt}$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$ et montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t)\, dt$$

sont convergentes.

On désigne par f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x, t)\, dt \quad .$$

On admettra que f a des dérivées de tous ordres données par

$$f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t)\, dt \quad .$$

b) Etudier le sens de variation de f. Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, et la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

2. a) Résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y' + y = x$$

sur $]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe une unique solution g telle que :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \quad .$$

Vérifier que $g(x) = x f(x)$.

b) Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

II

On se propose, dans cette partie, de démontrer que g n'est ni une fonction polynôme, ni une fonction rationnelle.

3. Montrer que g n'est pas une fonction polynôme.

4. On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, Q non constant, premiers entre eux, et vérifiant :

$$g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \forall x \in [0, +\infty[\quad .$$

a) Démontrer la relation

$$(X^2 P' + P - XQ)\, Q = X^2 Q' P$$

et en déduire l'existence d'un polynôme A vérifiant :

$$X^2 P' + P - XQ = AP \quad , \quad X^2 Q' = AQ \quad .$$

b) Déterminer le degré de A et sa valeur en 0.

c) Déterminer la forme de Q. Conclure.

III

5. Démontrer qu'il existe, pour tout entier $k \geqslant 0$, des polynômes M_k et N_k, déterminés de façon unique par la relation :

$$g^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \left[\frac{M_k(x)}{x^{2k+2}}\, g(x) - \frac{N_k(x)}{x^{2k+1}} \right] \quad , \quad \forall x \in]0, +\infty[\quad .$$

Ecrire M_0 et N_0 ainsi qu'une formule de récurrence exprimant M_k et N_k en fonction de M_{k-1}, M'_{k-1}, N_{k-1}, N'_{k-1}.

6. Vérifier que l'on a :

$$M_k(X) = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!\,(k+1)!}{(k+1-j)!\,(k-j)!\,j!} X^j$$

et

$$M'_k = k(k+1)\,M_{k-1}\ .$$

7. Déterminer le degré de N_k et son terme de plus haut degré.

IV

8. a) Montrer que, pour k entier $\geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-t}}{(1+xt)^{k+2}}\,dt$ est convergente. On notera $G_k(x)$ sa valeur.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{k+2}}\,dt$.

c) En déduire que la suite de fonctions dont le terme général est $x \mapsto x^{k+1} G_k(x)$ tend vers 0 uniformément sur $[0, +\infty[$.

9. Vérifier, pour $x \in [0, +\infty[$ et $k \geqslant 1$, les relations :

$$g^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\,k\,!\;G_{k-1}(x)$$

$$N_k(x) - M_k(x)\,f(x) = (k+1)\,!\;x^{2k+1}\,G_k(x)\ .$$

10. Montrer que la suite de fonctions $x \mapsto \dfrac{N_k(x)}{M_k(x)} - f(x)$ tend vers 0 uniformément sur $[0, +\infty[$.

V

11. Déterminer des constantes α_k et β_k telles que l'on ait

$$x^2 g^{(k+2)}(x) + (1 + \beta_k x)\,g^{(k+1)}(x) + \alpha_k\,g^{(k)}(x) = 0$$

pour tout $k \geqslant 1$ et tout $x > 0$.

12. Montrer que la fonction H définie sur $]0, +\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{x^{2k-1}}\left(N_{k-1}(x)\,M_k(x) - M_{k-1}(x)\,N_k(x)\right)$$

est une constante c que l'on calculera. [On pourra exprimer H en fonction de M_k, M_{k-1}, $g^{(k)}$ et $g^{(k+1)}$, puis calculer $H'(x)$].

13. Déterminer le plus grand commun diviseur de M_k et N_k.