ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION P'

CONCOURS D'ADMISSION 1992

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

On désigne par $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$) l'ensemble des matrices réelles (resp. complexes) à n lignes et n colonnes ; par $\mathcal{G}$ le groupe multiplicatif des matrices réelles de déterminant strictement positif ; par $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices réelles symétriques ; par $\mathcal{D}$ celui des matrices réelles symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

On dit que deux matrices complexes A et B sont *semblables* (resp. *congruentes*) s'il existe une matrice inversible complexe P vérifiant $B = P^{-1}AP$ (resp. $B = {}^{t}P\,A\,P$). On dit qu'un ensemble E de matrices complexes est *stable par similitude* (resp. *stable par congruence*) si toute matrice semblable (resp. congruente) à un élément de E appartient aussi à E.

I

On admettra que, pour tout élément A de $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$, la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ est convergente et on notera exp (A) sa somme, appelée exponentielle de A.

1. a) Soit P une matrice inversible complexe. Exprimer $\exp(P^{-1}AP)$ en fonction de exp (A).

b) Déterminer les valeurs propres de exp (A) en fonction de celles de A. [On admettra que toute matrice A est semblable à une matrice B dont les coefficients b_{ij} vérifient $b_{ij} = 0$ pour $i > j$].

c) Montrer que l'exponentielle définit une application de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{G}$.

2. Déterminer la parité de la multiplicité des valeurs propres réelles strictement négatives (s'il en existe) de exp (A) lorsque A est réelle.

3. L'application exponentielle de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{G}$ est-elle injective ? surjective ?

4. Calculer exp (A) lorsque A est de la forme $A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$ où les λ_i sont des scalaires et où les P_i sont des idempotents deux à deux orthogonaux (c'est-à-dire que $P_i^2 = P_i$ et $P_i P_j = 0$ pour $i \neq j$).

5. En déduire que l'application exponentielle induit une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{D}$.

II

Dans la suite du problème, on suppose toutes les matrices considérées réelles, y compris celles qui interviennent dans la définition des relations de similitude et de congruence.

On désigne par $\mathfrak{D}_m$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des éléments de $\mathscr{G}$ qui sont produits d'au plus m éléments de $\mathfrak{D}$, et on se propose de caractériser les éléments de $\mathfrak{D}_m$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des éléments A de $\mathscr{G}$ pour lesquels il existe au moins un vecteur colonne réel X tel que ${}^tX\,A\,X > 0$.

6. Vérifier que $\mathscr{S}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{C}$ et $\mathfrak{D}$ sont stables par congruence.

7. Démontrer que :

a) L'ensemble $\mathfrak{D}_{2m}$ est stable par similitude.

b) L'ensemble $\mathfrak{D}_{2m+1}$ est stable par congruence. [On pourra écrire :

$$P^{-1} A_1 \dots A_{2m} P = \prod_{i=1}^{m} (P^{-1} A_{2i-1}\, {}^tP^{-1})({}^tP\, A_{2i}\, P)$$

$${}^tP\, A_1 \dots A_{2m+1} P = ({}^tP\, A_1 P)(P^{-1} A_2 \dots A_{2m+1} P)\,.\,]$$

8. Soit A un élément de $\mathfrak{D}$. Montrer qu'il existe un élément B de $\mathfrak{D}$ tel que $A = B^2$.

9. Montrer que :

a) Tout élément de $\mathfrak{D}_{2m}$ est semblable à un élément de $\mathfrak{D}_{2m-1}$.

b) Tout élément de $\mathfrak{D}_{2m+1}$ est congruent à un élément de $\mathfrak{D}_{2m}$. [On pourra écrire $A_1 = B_1^2$ avec $B_1 \in \mathfrak{D}$].

10. Soient A un élément de $\mathfrak{D}$ et B un élément de $\mathscr{S}$. Vérifier que :

a) la matrice AB est diagonalisable ;

b) les valeurs propres de AB sont toutes strictement positives si et seulement si $B \in \mathfrak{D}$.

11. Comparer $\mathfrak{D}_2$ et l'ensemble des matrices diagonalisables dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

III

12. Vérifier que l'on a $\mathfrak{D}_2 \subset \mathscr{C}$, puis $\mathfrak{D}_3 \subset \mathscr{C}$.

13. Comparer $\mathfrak{D}_3 \cap \mathscr{S}$ et $\mathfrak{D}$.

14. On suppose ici $n = 2$.

a) Montrer que tout élément A de $\mathscr{C}$ est congruent à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & z \end{pmatrix},$$

où l'un au moins des coefficients x, z est strictement positif. [On pourra écrire A comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, puis diagonaliser la première.]

b) On suppose pour fixer les idées $x > 0$. Déterminer des nombres t et u de façon que la matrice :

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix},$$

avec $a > 0$, $c > 0$ et $a \neq c$.

c) Comparer $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{E}$.

Nous admettrons que, pour n quelconque, tout élément non symétrique de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

IV

On se propose ici de décrire $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{D}_5$. On note I la matrice identité.

15. Vérifier que $-I$ n'est pas dans $\mathcal{D}_4$. [On pourra raisonner par l'absurde et écrire $-I = AB$, avec A et B dans $\mathcal{D}_2$].

16. a) Montrer que toute matrice non multiple de I est semblable à une matrice dont la première colonne est :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Calculer la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Montrer que toute matrice non multiple de I est semblable à une matrice non symétrique ayant au moins un coefficient diagonal strictement positif.

d) Décrire l'ensemble $\mathcal{D}_4$.

17. Décrire l'ensemble $\mathcal{D}_5$.

♦♦♦