ECOLE POLYTECHNIQUE **OPTION P'**

CONCOURS D'ADMISSION 1993

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

L'objet de ce problème est l'étude des fonctions d'une variable réelle vérifiant une relation de la forme

$$f(x+1)-f(x-1)=\lambda f'(x) \;.$$

Pour tout entier positif ou nul k, on désigne par $C^k(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions complexes de classe C^k d'une variable réelle.

On note Δ l'endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$ défini par

$$(\Delta f)(x)=f(x+1)-f(x-1) \;;$$

pour tout nombre complexe non nul λ, on pose

$$E_\lambda=\{f\in C^1(\mathbb{R}) \mid \Delta f=\lambda f'\}$$

I

1) Soit f un élément de E_λ.

a) Montrer que f est indéfiniment dérivable.

b) Exprimer les dérivées successives de f en fonction de ses translatées.

c) Montrer que si f est bornée, elle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les fonctions polynômiales f appartenant à E_λ.
[On pourra développer $f(x+1)$ et $f(x-1)$ à l'aide de la formule de Taylor]

3) On désigne par T un nombre réel >0 et par $E_\lambda(T)$ le sous-espace vectoriel de E_λ formé des fonctions périodiques de période T.

Démontrer que la dimension de $E_\lambda(T)$ est finie, et qu'elle est égale à 1 si $|\lambda|$ est supérieur ou égal à un nombre que l'on précisera, ou si λ n'est pas réel.

II

Pour toute fonction $f\in C^0(\mathbb{R})$ on note Jf la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(Jf)(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x+t)\,dt \;.$$

4.a) Etant donné un entier $k \geq 0$, pour quels k' a-t-on

$$J(\mathbb{C}^k(\mathbb{R})) \subset \mathbb{C}^{k'}(\mathbb{R}) \quad ?$$

b) Ecrire une relation simple entre Δf et Jf' lorsque $f \in C^1(\mathbb{R})$.

5) On fixe un nombre complexe μ.

a) Démontrer que, si $|\mu| > 1$, la seule fonction continue bornée f vérifiant $Jf = \mu f$ est la fonction nulle.
[On pourra poser $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ pour toute fonction bornée f].

b) On suppose $|\mu| > 1$. Quels sont les éléments f de $E_{2\mu}$ tels que f' soit bornée ?

c) Montrer que, pour tout $\mu \in]1, +\infty[$, $E_{2\mu}$ contient deux fonctions de la forme $x \mapsto e^{Kx}$, où K est un nombre réel non nul.

III

6) On se propose de déterminer les fonctions h bornées de $\mathbb{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant $Jh = h$. Etant donnée une telle fonction h, on définit une suite de fonctions u_n sur $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |h(x+t) - h(x)|^2 \, dt$$

$$u_n = J u_{n-1} \qquad \forall n \geq 1 \quad .$$

a) Vérifier que, pour $u, v \in \mathbf{R}$:

$$|h(u) - h(v)|^2 \leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |h(u+t) - h(v+t)|^2 \, dt$$

b) En déduire que l'on a $u_1 \geq u_0$.

c) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

d) Comparer u_0 à $J|h|^2 - |h|^2$.

e) Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge pour tout x.

f) Conclure.

7) Soit p un entier ≥ 0. Déterminer toutes les fonctions $f \in E_2$ telles que $f^{(p)}$ soit bornée.

IV

8) On définit une application g de $\mathbb{C}$ dans lui-même par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{sh\, z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \ . \end{cases}$$

a) Calculer les parties réelle et imaginaire de $g(z)$ en fonction de celles de z.

b) Vérifier que la fonction φ définie sur $[\, 0 \, , +\infty \,[$ par

$$\varphi(a) = \begin{cases} \dfrac{th\, a}{a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

est strictement décroissante.

c) On note ψ la fonction réciproque de φ, définie sur $]\, 0 \, , 1 \,]$. Déterminer la limite de $\psi(x) - \dfrac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0.

d) Vérifier que la fonction $b \mapsto ch\left(\psi\left(\dfrac{tg\, b}{b} \right)\right) \dfrac{\sin b}{b}$ est définie sur un intervalle $]\, \pi \, , \pi + \alpha \,]$, $\alpha > 0$, et déterminer sa limite lorsque b tend vers π.

e) Montrer qu'il existe un réel β tel que, pour tout $\lambda \in \,]\, -\infty \, , \beta \,]$, E_λ contienne une fonction de la forme $x \mapsto e^{Kx}$, où K est un nombre complexe non nul.