ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1994

OPTION P'

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Dans tout le problème on désigne par N un entier strictement positif et par F_N l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, de classe C^{N+1}, bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre 1, 2, ..., $N+1$. Pour toute fonction bornée φ sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\| \varphi \| = \sup_{x \in \mathbb{R}} | \varphi(x) | \ .$$

On se propose de démontrer, pour certaines valeurs de N, une inégalité de la forme

$$(1) \qquad \| \varphi' \| \leq C_1 \| \varphi \| + C_2 \| \varphi^{(N+1)} \|$$

valable pour toute φ dans F_N, et où C_1 et C_2 sont des constantes positives. La première partie, très courte, est consacrée au cas où $N = 1$. La suite du problème, indépendante de la première partie, traitera le cas $N = 3$; dans ce but on fera d'abord, dans les parties II et III, une étude purement algébrique de certaines matrices.

I

1.) Prenant $N = 1$, démontrer une inégalité de la forme (1) en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 avec reste intégral.

II

Dans cette partie, on fixe une matrice inversible A, de coefficients complexes $a_{i,j}$, à N lignes et N colonnes. Pour tout nombre complexe non nul x, on note $T(x)$ la matrice de coefficients

$$T(x)_{i,j} = x^{j-i+1} a_{i,j}$$

et $X(x)$ la matrice de coefficients

$$X(x)_{i,j} = \delta_{i,j} x^i \qquad , \qquad i, j = 1, ..., N$$

où $\delta_{i,j}$ est égal à 1 si $i = j$ et à zéro dans le cas contraire.

Enfin on désigne par J_N la matrice de coefficients $(J_N)_{i,j} = (-1)^i \delta_{i,j}$.

2.) Comparer $T(x)$ et $x(X(x))^{-1} A\, X(x)$, puis $\det(T(x))$ et $x^N \det A$.

3.) Etant donné deux nombres complexes non nuls x et y, vérifier que le produit des racines du polynôme caractéristique de $(T(x))^{-1} T(y)$ est égal à $(y/x)^N$.

4.) Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\det(\lambda I_N - (T(-x))^{-1} T(x)) = \det(\lambda I_N + J_N^{-1} A^{-1} J_N A)$$

III

Pour tout entier $N \geqslant 2$, on note A_N la matrice à N lignes et N colonnes ayant pour coefficients

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 1 \\ j\,(j-1)\ldots(j-i+2) \quad \text{si} \quad 1 < i \leqslant j+1 \\ 0 \text{ si } i > j+1 \end{cases} .$$

Pour tout nombre complexe non nul x, on note $T_N(x)$ la matrice de coefficients

$$T_N(x)_{i,j} = x^{j-i+1} a_{i,j} .$$

5.) Calculer $\det A_2$ et $\det A_3$.

6.) Calculer $\det A_N$ en fonction de N. On retiendra de cette question que A_N est inversible.

On désigne par P_N le polynôme caractéristique de la matrice $(T_N(-1))^{-1} T_N(1)$.

7.) Calculer P_2.

8.) Vérifier que, pour λ non nul, $P_N(\lambda) = \lambda^N P_N(\frac{1}{\lambda})$. En déduire que si N est impair, (-1) est racine de P_N.

9.) On suppose maintenant $N = 3$.

a) Calculer la matrice $(T_3(-1))^{-1}$, puis la trace de $(T_3(-1))^{-1} T_3(1)$.

b) Déterminer les racines et les coefficients du polynôme P_3.

IV

On désigne par E_N l'espace vectoriel des fonctions complexes f, de classe C^{N-1}, définies sur $[\,0\,,+\infty\,[$, et possédant la propriété suivante :

« Il existe des nombres complexes $c_{n,k}$, où $n = 1, 2, \ldots, N$ et $k = 0, 1, 2, \ldots$, tels que l'on ait

$$f(k+x) = \sum_{n=1}^{N} c_{n,k} x^n$$

pour $k > 0$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ou $k = 0$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. »

Dans ce cas, pour tout k, on notera v_k le vecteur de coordonnées $c_{1,k}, \dots, c_{N,k}$.

10.) Comparer $T_N(\frac{1}{2})(v_k)$ et $T_N(-\frac{1}{2})(v_{k+1})$.

11.) En déduire un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathbb{C}^N \to E_N$.

On suppose désormais $N = 3$.

On désigne par α la racine de P_3 appartenant à l'intervalle $]-1, 0[$, et par w un vecteur propre de $(T_3(-\frac{1}{2}))^{-1}(T_3(\frac{1}{2}))$ pour la valeur propre α.

On désigne par E_3^0 le sous-espace vectoriel de E_3 formé des fonctions f qui tendent vers 0 lorsque la variable tend vers $+\infty$.

12.) Montrer que E_3^0 est de dimension 1, et écrire un élément f_0 non nul de cet espace en fonction de α et des composantes w_1, w_2, w_3 de w.

13.) On prolonge f_0 en une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ et notée f ; on considère une fonction $\varphi \in F_3$.

Démontrer que l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(4)}(x) f(x)\, dx$$

est absolument convergente et de la forme

$$I = \lambda \varphi'(0) + \mu \sum_{k \geq 0} \alpha^k \left(\varphi(k+\frac{1}{2}) - \varphi(-k-\frac{1}{2}) \right)$$

où λ et μ sont des constantes que l'on exprimera en fonction de α, w_1, w_2, w_3.

14.) En déduire une inégalité de la forme (1) pour $N = 3$. [On pourra admettre que w_2 est non nul.]