ÉCOLE POLYTECHNIQUE **OPTION P'**
CONCOURS D'ADMISSION 1994

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Ce problème est consacré à l'étude d'une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et de certaines courbes tracées sur cette surface.
On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base naturelle de $\mathbb{R}^3$, par $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire usuel et par $\|\cdot\|$ la norme correspondante. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des couples (u, v) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $-\pi \leqslant v \leqslant \pi$.
On définit une application F de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v), F_3(u, v))$$

où

$$\begin{aligned} F_1(u, v) &= (2 + \sin u \cos v) \cos 2v \\ F_2(u, v) &= (2 + \sin u \cos v) \sin 2v \\ F_3(u, v) &= \sin u \sin v. \end{aligned}$$

Enfin on note $\mathcal{M}$ l'ensemble $F(\mathcal{R})$.

I

1.) Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial u}, \dfrac{\partial F}{\partial v}, \left\|\dfrac{\partial F}{\partial u}\right\|^2, \left\|\dfrac{\partial F}{\partial v}\right\|^2, \left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\middle|\dfrac{\partial F}{\partial v}\right)$.

2.) Étant donné un point (u, v) de $\mathcal{R}$, déterminer tous les points (u', v') vérifiant $F(u', v') = F(u, v)$.

3.) Dessiner la projection orthogonale de $\mathcal{M}$ sur le plan (e_1, e_2).

4.) Déterminer les extrema de la fonction F_3.

5.) On fixe un réel b dans $[-\pi, \pi]$ et on note φ_b l'application de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi_b(u) = F(u, b)$.

a) Reconnaître la courbe $\mathcal{C}_b$, image de φ_b, ainsi que sa projection orthogonale sur le plan (e_1, e_2).

b) Quelle est la longueur de $\mathcal{C}_b$.

6.) Montrer que, si u appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, la surface $\mathcal{M}$ admet un plan tangent au point $F(u, v)$. Écrire les coordonnées d'un vecteur normal unitaire, que l'on notera $N(v)$, dans le cas où $u = 0$.

II

Pour tout réel $a \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on désigne par ψ_a l'application $v \mapsto F(a, v)$ de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}^3$ et par $\mathcal{D}_a$ la courbe image.

7.) Pour quels couples (a, a') a-t-on $\mathcal{D}_a = \mathcal{D}_{a'}$?

8.) **a)** Reconnaître la courbe $\mathcal{D}_0$.

b) Est-il possible de choisir, pour tout point m de $\mathcal{D}_0$ un vecteur $V(m)$, normal en m à $\mathcal{M}$, unitaire et dépendant continûment de m ?

9.) Pour quelles valeurs de a la courbe $\mathcal{D}_a$ est-elle plane ?

10.) Nous dirons qu'un sous-ensemble E d'un espace $\mathbb{R}^n$ est connexe si, pour tout couple (x, y) de E, il existe une application continue f d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ dans E vérifiant $f(\alpha) = x$ et $f(\beta) = y$.

a) Montrer que le complémentaire de $\mathcal{D}_0$ dans $\mathcal{M}$ est connexe.

b) Montrer que, pour $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, le complémentaire de $\mathcal{D}_a$ dans $\mathcal{M}$ n'est pas connexe, mais est réunion de deux sous-ensembles connexes, disjoints et non vides.
[On pourra introduire la fonction f sur $\mathcal{M}$ définie par $f\left(F(u, v)\right) = |u|$ et montrer qu'elle est continue]

11.) Écrire la longueur $L(a)$ de $\mathcal{D}_a$ sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer ; puis étudier la continuité de la fonction L.

III

Pour tout point (u, v) de $\mathcal{R}$, on pose

$$g(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v)).$$

On fixe un réel v_0 dans $[-\pi, \pi]$.

12.) Calculer le jacobien J de g au point $(0, v_0)$.

13.) **a)** Montrer que, si $v_0 \neq \dfrac{\pi}{2}$, il existe un voisinage de $(0, v_0)$ sur lequel g est injective et admet une application réciproque différentiable h.

b) Calculer les deux dérivées partielles de la fonction composée $F_3 \circ h$ au point $g(0, v_0)$.

14.) Étudier la position de la surface $\mathcal{M}$ par rapport à son plan tangent au voisinage du point $F(0, 0)$.

♦ ♦
♦