Dans tout ce problème on fixe un entier strictement positif N ; on désigne par $(e_1, \dots, e_N)$ la base naturelle de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$; on munit ce dernier du produit scalaire usuel $(x \mid y) = \sum_n \bar{x}_n y_n$ et de la norme correspondante $\|x\| = (x \mid x)^{1/2}$. On considère chaque vecteur x de $\mathbb{C}^N$ comme une matrice colonne et on note ${}^t x$ la matrice ligne correspondante, de sorte que l'on a $(x \mid y) = {}^t\bar{x}\, y$.

On désigne par $M(N, \mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes à N lignes et N colonnes, par ${}^tA$ la transposée d'une matrice A, par E le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (matrices A telles que ${}^tA = A$), et par E_0 l'espace vectoriel réel des matrices symétriques réelles.

I

1. Déterminer la dimension de E.

2. On fixe une base orthonormée $(v_1, \dots, v_N)$ de $\mathbb{C}^N$; pour tout couple (i, j) avec $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, $i \leq j$, on pose

$$B_{ij} = v_i\, {}^tv_j + v_j\, {}^tv_i \quad .$$

a) Calculer $B_{ij}\, \bar{v}_k$.

b) Montrer que les matrices B_{ij} forment une base de E.

c) Calculer la trace de la matrice $\overline{B_{ij}}\, B_{kl}$ pour $i \leq j$, $k \leq l$.

II

Dans cette partie on fixe une matrice M de $M(N, \mathbb{C})$ et on définit un endomorphisme $\hat{M}$ de E par $\hat{M}(B) = {}^tM B + B M$ pour tout $B \in E$.

3. Vérifier que si λ et λ' sont des valeurs propres de M, $\lambda + \lambda'$ est valeur propre de $\hat{M}$.

4. On suppose dans cette question et dans la suivante que

$$N = 2 \quad , \quad v_1 = e_1 \quad , \quad v_2 = e_2$$

Ecrire explicitement les matrices B_{ij}.

5. On note λ_i $(i = 1, 2)$ les valeurs propres de la matrice M.

a) Ecrire la matrice de $\hat{M}$ dans la base (B_{11}, B_{12}, B_{22}).

b) Montrer que les valeurs propres $\hat{M}$ sont les nombres $\lambda_i + \lambda_j$.

On admettra que ce dernier résultat reste valable pour $N > 2$.

III

On se donne une matrice $M \in M(N, \mathbb{R})$, ensemble des matrices réelles à N lignes et N colonnes, et un vecteur $a \in \mathbb{R}^N$; on admet que le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X(t) = M X(t) \\ X(0) = a \end{cases}$$

possède une solution unique à valeurs dans $\mathbb{R}^N$; on la notera

$$t \mapsto X(M, a, t)$$

Pour toute matrice $B \in E_0$, on désigne par Φ_B la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^N$ définie par

$$\Phi_B(x, y) = {}^t x B y$$

et par Q_B la forme quadratique $x \mapsto \Phi_B(x, x)$. On dit que B est *définie positive* si l'on a $Q_B(x) > 0$ pour tout x non nul, et *définie négative* si $-B$ est définie positive.

6. Vérifier que l'on a

$$\frac{d}{dt} Q_B(X(M, a, t)) = Q_{\hat{M}(B)}(X(M, a, t)) \quad .$$

7. On suppose que toutes les valeurs propres de M ont une partie réelle strictement négative ; on admet que, dans ce cas, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} X(M, a, t) = 0$ pour tout a.

a) Montrer que, si $B \in E_0$ et si $\hat{M}(B)$ est définie négative, alors B est définie positive.

b) Démontrer l'existence d'une matrice B de E_0 définie positive et vérifiant $\hat{M}(B) = -I$.

8. On suppose qu'il existe une matrice B définie positive telle que $\hat{M}(B)$ soit définie négative et on se propose de démontrer que toutes les valeurs propres de M ont des parties réelles strictement négatives.

a) Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que l'on ait $k\, Q_B(x) \leq -Q_{\hat{M}(B)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

b) Déterminer la limite de $X(M, a, t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

c) Conclure.

9. Supposant $N = 2$, construire explicitement une matrice M dont toutes les valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives et une matrice B définie positive telles que $\hat{M}(B)$ ne soit pas définie négative.