option P'

Ce problème a pour but l'étude de l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x}$$

où la fonction inconnue u est définie sur $\mathbf{R}^2$, à valeurs complexes et admet des dérivées partielles continues à tous les ordres. Les trois parties du problème sont indépendantes.

Première partie

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions de $(\mathcal{E})$ qui sont 2π-périodiques par rapport à x ; on désigne par F l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbf{R}$, complexes, de classe C^∞ et périodiques de période 2π. Les solutions de $(\mathcal{E})$ seront notées, soit $(t,x) \mapsto u(t,x)$, soit $(t,x) \mapsto u_t(x)$ avec $u_t \in F$. On cherche à construire des *constantes du mouvement*, ou fonctions complexes φ sur F telles que $\varphi(u_t)$ soit indépendant de t lorsque $(t,x) \mapsto u_t(x)$ est solution de $(\mathcal{E})$.

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) $\forall k \in \mathrm{N} \quad \forall u \in F \qquad \int_0^{2\pi} (u(x))^k u'(x)dx = 0.$

b) $\forall n \in \mathrm{N} \quad \forall u \in F \qquad \int_0^{2\pi} u^{(n)}(x)u^{(n+1)}(x)dx = 0.$

c) Etant donné $(m,n) \in \mathrm{N}^2$, l'intégrale $\int_0^{2\pi} u^{(m)}(x)u^{(n)}(x)dx$ est nulle quelle que soit $u \in F$ si et seulement si $m-n$ est impair.

2. Calculer $\int_0^{2\pi} (u_p(x))^n u_p^{(3)}(x)dx$ où n et p sont des entiers vérifiant $1 \leq n \leq p$ et

$$u_p(x) = e^{ix} + e^{-ipx}.$$

3. On se donne un polynôme P à une indéterminée et à coefficients complexes et on définit une fonction complexe φ sur F par

$$\varphi(u) = \int_0^{2\pi} P(u(x))dx\,.$$

a) Démontrer que, si une fonction $(t,x) \mapsto u_t(x)$ est solution de $(\mathcal{E})$, on a

$$\frac{d}{dt}\varphi(u_t) = \int_0^{2\pi} P'(u_t(x))(u_t^{(3)}(x) + 6u_t(x)u_t'(x))dx\,.$$

b) Déterminer les polynômes Q vérifiant

$$\forall u \in F \quad \int_0^{2\pi} Q(u(x))(u^{(3)}(x) + 6u(x)u'(x))dx = 0\,.$$

c) Construire un espace vectoriel complexe de dimension 3 formé de constantes du mouvement.

Deuxième partie

4. Etant donné un nombre réel $v > 0$, déterminer les nombres réels α et β tels que, en posant $f(t,x) = \beta(x+vt)$, la fonction $u = \alpha(1 - \mathrm{th}^2 \circ f)$ soit une solution non constante de $(\mathcal{E})$.

Troisième partie

On note $C^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions sur $\mathbf{R}$, complexes, de classe C^∞, et E son sous-espace vectoriel formé des fonctions u ayant la propriété suivante : il existe un réel a (dépendant de u) tel que $u(x) = 0 \ \forall x \leq a$.

On définit dans E des endomorphismes D, S et M_f (pour $f \in C^\infty(\mathbf{R})$) de la façon suivante :

$$D(u) = u'$$
$$(S(u))(x) = \int_{-\infty}^{x} u(y)dy$$
$$(M_f(u))(x) = f(x)u(x)\ .$$

On appelle

- *opérateur différentiel* tout endomorphisme T de E de la forme

$$T = \sum_{p \geq 0} M_{f_p} D^p$$

où f_p est nulle pour p suffisamment grand

- *opérateur intégral élémentaire* tout produit fini $A_1 \cdots A_n$ où chaque A_i est égal à S ou à un M_f, l'un au moins des A_i étant égal à S

- *opérateur intégral* toute somme finie d'opérateurs intégraux élémentaires.

Il est demandé aux candidats d'écrire tous les opérateurs différentiels rencontrés dans la suite du problème sous la forme indiquée ci-dessus.

On admettra les résultats suivants :

- $\sum_{p \geq 0} M_{f_p} D^p = 0$ implique $f_p = 0$ pour tout p
- si un opérateur différentiel est égal à un opérateur intégral, il est nul.

5. Calculer $DM_f - M_f D$.

6. Calculer DS et SD.

7. Démontrer l'assertion suivante : si l'on a $M_f S = \Sigma P_i$ où chaque P_i est un opérateur intégral élémentaire de la forme $A_1 \cdots A_n$ où deux au moins des A_j sont égaux à S, alors $f = 0$.

8. On fixe une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R})$. Déterminer les triplets de fonctions f_0, f_1, f_2 de $C^\infty(\mathbf{R})$ tels que l'endomorphisme $(D + M_{f_0} + M_{f_1} S + M_{f_2} S^2)^2 - (D^2 + M_f)$ soit de la forme ΣP_i considérée à la question **7.**.

9. Déterminer les opérateurs différentiels T tels que l'endomorphisme

$$(D^2 + M_f)(D + M_{f_0} + M_{f_1} S + M_{f_2} S^2) - T$$

soit un opérateur intégral.

10. Calculer $T(D^2 + M_f) - (D^2 + M_f)T$.