PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

OPTION PC

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le but du problème est l'étude qualitative des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0 \,, \tag{E}$$

où q est une fonction continue, définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On appelle solution de (E) toute fonction y définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, deux fois dérivable, qui vérifie $y''(t) + q(t)y(t) = 0$. pour tout nombre réel t.

On admettra sans démonstration que, pour tous nombres réels t_0, y_0, y'_0. il existe une *unique* solution y de (E) qui satisfait,

$$y(t_0) = y_0 \quad , \quad y'(t_0) = y'_0 \,.$$

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}$. On dit qu'une fonction f est positive (resp. négative) si elle vérifie $f(t) \geq 0$ (resp. $f(t) \leq 0$) pour tout nombre réel t.

On dira qu'un nombre réel t est un zéro d'une fonction f si $f(t) = 0$.

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des fonctions convexes qui seront utilisées aux questions **5.**, **6.** et **18.**.

Première partie

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, convexe et positive. On suppose que f a deux zéros t_1, t_2 et que $t_1 < t_2$. Montrer que f est nulle sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.

2. Soit c un nombre réel et soit f une fonction convexe et majorée sur l'intervalle $[c, +\infty[$. On pose, pour tout t dans $]c, +\infty[$, $\varphi(t) = \dfrac{f(t) - f(c)}{t - c}$. Montrer que la fonction φ a une limite négative ou nulle quand t tend vers $+\infty$. Montrer que la fonction f est décroissante sur $[c, +\infty[$.

3. Montrer que toute fonction convexe et majorée sur $\mathbf{R}$ est constante.

Deuxième partie

On suppose dans cette deuxième partie que la fonction q est négative et n'est pas la fonction nulle.

4. Soit y une solution de (E). Montrer que la fonction y^2 est convexe.

5. Montrer que si y est une solution de (E) qui a deux zéros distincts, alors y est nulle.

6. Montrer que si y est une solution bornée de (E), alors y est nulle.

7. Soit y_0 un nombre réel strictement positif et soit y la solution de (E) qui satisfait $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$.

a) Montrer que la fonction y est minorée par la constante y_0, et qu'elle est convexe.

b) On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $\omega > 0$ tel que $q(t) \leq -\omega^2$ pour tout nombre réel t. Trouver la solution Y de l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$ qui satisfait $Y(0) = y_0$, $Y'(0) = 0$ et montrer que, pour tout t, $y(t) \geq Y(t)$.

Troisième partie

8. Soient y et z deux solutions de (E). Montrer que la fonction $yz' - y'z$ est constante.

9. On désigne par y_1 et y_2 les solutions de (E) qui satisfont

$$y_1(0) = 1 \quad , \quad y_1'(0) = 0 \, ,$$
$$y_2(0) = 0 \quad , \quad y_2'(0) = 1 \, .$$

Montrer que (y_1, y_2) est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ sur $\mathbf{R}$ des solutions de (E). Quelle est valeur de $y_1y_2' - y_2y_1'$? Les fonctions y_1 et y_2 peuvent-elles avoir un zéro commun ?

10. Montrer que, si q est une fonction paire, la fonction y_1 est paire et la fonction y_2 est impaire.

11. On suppose que la fonction q est périodique de période π, c'est-à-dire que, pour tout nombre réel t, $q(t + \pi) = q(t)$.

a) Montrer que l'on définit un endomorphisme μ de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ en posant, pour tout y dans $\mathcal{S}$ et tout nombre réel t,

$$\big(\mu(y)\big)(t) = y(t + \pi) \, .$$

b) Montrer que μ est inversible.

c) Ecrire la matrice M de μ dans la base (y_1, y_2) à l'aide des valeurs en π des fonctions y_1, y_2 et de leurs dérivées. Calculer le déterminant de M et en déduire la matrice M^{-1}.

d) Ecrire la matrice de μ^{-1} dans la base (y_1, y_2) à l'aide des valeurs en $-\pi$ des fonctions y_1, y_2 et de leurs dérivées.

12.a) Montrer que si la fonction q est paire et périodique de période π, les coefficients diagonaux de M sont égaux.

On suppose dans la suite de cette partie que la fonction q est paire et périodique de période π et l'on désigne par α la valeur commune des coefficients diagonaux de M.

b) Quel est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme μ ?

13. On suppose $|\alpha| > 1$.

a) Montrer que l'endomorphisme μ possède deux vecteurs propres linéairement indépendants, qui sont des solutions de (E) non bornées.

b) En déduire que toute solution bornée de (E) est nulle.

14.a) Montrer que si $\alpha = 1$, (E) possède une solution non nulle périodique de période π.

b) Montrer que si $\alpha = -1$, (E) possède une solution non nulle périodique de période 2π.

15. On étudie le cas où $|\alpha| < 1$.

a) Montrer qu'il existe une base (u_1, u_2) de $\mathcal{S}$ dans laquelle la matrice de μ est la matrice d'une rotation. Montrer que u_1 et u_2 sont des fonctions bornées et que toute solution de (E) est bornée.

b) Montrer que la fonction $r = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2}$ n'a pas de zéro, que la fonction $\dfrac{1}{r^2}$ est minorée par une constante strictement positive et qu'aucune primitive de $\dfrac{1}{r^2}$ n'est une fonction majorée sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que la fonction y_1 a au moins un zéro sur $]0, +\infty[$. [On pourra remarquer que si y_1 ne s'annulait pas sur $[0, +\infty[$, la fonction $\operatorname{Arctan} \dfrac{y_2}{y_1}$ serait dérivable sur cet intervalle]. En déduire que y_1 a au moins deux zéros distincts.

Quatrième partie

16. Soit y une solution non nulle de (E) admettant un zéro a.

a) Montrer que $y'(a) \neq 0$. En déduire qu'il existe un nombre réel ε strictement positif tel que le seul zéro de y dans l'intervalle $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ soit a.

b) On suppose que y possède aussi un zéro a', avec $a < a'$. Montrer qu'il existe un zéro b de y vérifiant $a < b$, et tel que y n'ait aucun zéro dans l'intervalle $]a, b[$.

c) On considère une autre solution z de (E). Montrer, en utilisant le résultat de la question **8.**, que z a un zéro dans l'intervalle $[a, b]$.

17. On suppose à nouveau que q est une fonction paire et périodique de période π, et que $|\alpha| < 1$, comme à la question **15.**. Montrer que toute solution de (E) a une infinité de zéros.

18. On suppose q non nulle, périodique de période π et positive. Montrer que toute solution de (E) a une infinité de zéros.