ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 1998 OPTION **PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel réel, de dimension n, $n \geq 2$. Soit B une forme bilinéaire symétrique sur E, c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous $v, v', w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $B(v, v') = B(v', v)$ et $B(\lambda v + \mu w, v') = \lambda B(v, v') + \mu B(w, v')$.

On suppose qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$B(e_i, e_i) = 1 .$$

Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$B(e_i, e_j) = b_{ij} .$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et pour tout $v \in E$, on définit

$$\sigma_i(v) = v - 2B(v, e_i)\, e_i .$$

On désigne par 1_E l'application identique de E dans E, par $\sigma\sigma'$ la composée de deux endomorphismes σ, σ' de E, et par $\sigma^k (k \in \mathbb{N}^*)$ les puissances d'un endomorphisme σ.

Première partie

1. On fixe $i \in \{1, \dots, n\}$.

a) Montrer que σ_i est une application linéaire de E dans E.

b) Calculer σ_i^2.

c) Déterminer la dimension du noyau F_i de la forme linéaire sur E définie par $v \mapsto B(v, e_i)$.

d) Déterminer les valeurs propres de σ_i et les sous-espaces propres associés. Quelle est la nature géométrique de σ_i ?

e) Montrer que $B(\sigma_i(v), \sigma_i(v')) = B(v, v')$ pour tous $v, v' \in E$.

2. On fixe i et j dans $\{1, \dots, n\}$, tels que $i \neq j$. Soit E_{ij} le sous-espace vectoriel de E engendré par e_i et e_j.

a) Montrer que E_{ij} est stable par $\sigma_i\sigma_j$. On notera ρ_{ij} l'endomorphisme de E_{ij} défini par restriction de $\sigma_i\sigma_j$.

b) Etudier ρ_{ij} lorsque $|b_{ij}| = 1$: valeurs propres, sous-espaces propres. Est-il diagonalisable ?

c) Montrer que, si $|b_{ij}| = 1$, il n'existe pas d'entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\sigma_i\sigma_j)^k = 1_E$.

3. On suppose que $|b_{ij}| < 1$.

a) Montrer que la restriction B_{ij} de B à $E_{ij} \times E_{ij}$ est un produit scalaire.

b) Montrer que E est somme directe de E_{ij} et de $F_i \cap F_j$.

4. On suppose dans la suite de cette partie que, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$, il existe un entier $N_{ij} \geq 2$ tel que

$$b_{ij} = -\cos\frac{\pi}{N_{ij}} .$$

Le plan E_{ij} muni du produit scalaire B_{ij} est alors un plan euclidien. On y choisit l'orientation telle qu'une mesure de l'angle orienté (e_i, e_j) soit comprise entre 0 et π.

a) Montrer que ρ_{ij} est un automorphisme orthogonal, que l'on précisera, du plan E_{ij}.

b) Montrer que $(\sigma_i\sigma_j)^{N_{ij}} = 1_E$ et que, pour tout entier k tel que $1 \leq k < N_{ij}$, $(\sigma_i\sigma_j)^k \neq 1_E$.

5. On se place dans le cas où $n = 2$ et l'on pose

$$N_{12} = N .$$

a) Montrer que si $N \in \{2, 3, 4, 6\}$, il existe une base (e_1, f_2) de E, où $f_2 = \mu e_2$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $1 \leq \mu < 2$, telle que σ_1 et σ_2 aient dans cette base des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Discuter l'unicité d'une telle base.

b) Dans chacun des cas $N = 2, 3, 4, 6$, faire une figure soignée où l'on indiquera e_1 et f_2 et leurs images par les endomorphismes σ_1 et σ_2.

c) S'il existe une base de E telle que σ_1 et σ_2 aient dans cette base des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$, a-t-on nécessairement $N \in \{2, 3, 4, 6\}$? [On considérera la trace de $\sigma_1\sigma_2$.]

Deuxième partie

Dans cette partie n et B sont quelconques.

6.a) On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et, pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$,

$$\varepsilon_i = \sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(e_i) .$$

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$e_i = \varepsilon_i + 2 \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}\, \varepsilon_k .$$

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est-elle une base de E ?

b) On considère l'endomorphisme de E, $\tau = \sigma_1 \dots \sigma_n$.

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\tau(e_i) = -\varepsilon_i - 2 \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}\, \varepsilon_k .$$

c) Soit $C = (C_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$C_{ij} = \begin{cases} 2\, b_{ij} & \text{si } i < j , \\ 0 & \text{si } i \geq j . \end{cases}$$

Soit ${}^tC$ la matrice transposée de C et soit I_n la matrice identité d'ordre n.

Montrer que la matrice $I_n + C$ est inversible et que la matrice T de l'endomorphisme τ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $-(I_n + C)^{-1}(I_n + {}^tC)$.

d) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{dét}\,(\lambda I_n - T) = \text{dét}\,\Big((\lambda + 1)I_n + \lambda C + {}^tC\Big) .$$

7. [Cette question est indépendante des précédentes.] Soient $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)$ une famille de nombres réels et λ un nombre réel. On considère, pour $n \geq 3$, le déterminant d'ordre n, noté $P_{(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)}(\lambda)$, défini de la manière suivante :

- les termes diagonaux sont égaux à $\lambda + 1$,
- pour $1 \leq i \leq n-1$, le terme en position $(i+1, i)$ est β_i et le terme en position $(i, i+1)$ est $\lambda\beta_i$,
- le terme en position $(n, 1)$ est β_n,
- le terme en position $(1, n)$ est $\lambda\beta_n$,
- les autres termes sont nuls.

Pour $n \geq 4$, ce déterminant s'écrit donc :

$$P_{(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},\beta_n)}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda\beta_1 & 0 & . & \lambda\beta_n \\ \beta_1 & \lambda+1 & \lambda\beta_2 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda+1 & \lambda\beta_{n-1} \\ \beta_n & 0 & . & \beta_{n-1} & \lambda+1 \end{vmatrix}.$$

a) Calculer $P_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(\lambda)$.

b) Calculer le coefficient $a_{(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},\beta_n)}$ du terme de degré $n-1$ du polynôme en λ, $P_{(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},\beta_n)}(\lambda)$. [On considérera d'abord le cas où $\beta_n = 0$.]

Troisième partie

On suppose encore que $n \geq 3$ et que, pour $i \neq j$, $b_{ij} = -\cos\dfrac{\pi}{N_{ij}}$, où les entiers N_{ij} sont tels que $N_{1n} \in \{3, 4, 6\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $N_{i,i+1} \in \{3, 4, 6\}$, tous les autres coefficients N_{ij} étant égaux à 2.

On désigne par p (resp. q) le nombre de couples (i, j), $1 \leq i < j \leq n$, tels que $N_{ij} = 4$ (resp. $N_{ij} = 6$).

8. On suppose que p et q sont pairs. Montrer qu'il existe une famille $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ de nombres réels non nuls tels que, dans la base $(\mu_1 e_1, \dots, \mu_n e_n)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la matrice de σ_i soit à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

9. La condition « p et q pairs » est-elle une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la matrice de σ_i soit à coefficients dans $\mathbb{Z}$? [On étudiera la trace de l'endomorphisme τ défini à la question **6.b)** et l'on utilisera les résultats de la deuxième partie.]