ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 1999 FILIÈRE PC

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆ ⋆ ⋆

Notations

Pour tout entier $n \geq 1$, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, noté $(\ \ |\ \ )$, et de la norme euclidienne associée, notée $\| \ \ \|$. On désigne par $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices carrées *symétriques*, à n lignes et n colonnes, à coefficients réels. On identifie une matrice $M \in \mathcal{S}_n$ à une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et Mx désigne l'image par M d'un élément x de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $M \in \mathcal{S}_n$ est *positive* si, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $(Mx|x) \geq 0$.

On dit que $M \in \mathcal{S}_n$ est *définie positive* si, pour tout x non nul dans $\mathbb{R}^n$, $(Mx|x) > 0$.

Première partie : propriétés des matrices symétriques

On considère une matrice symétrique $M \in \mathcal{S}_n$ et l'on pose, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$,

$$q_M(x) = (Mx|x)\ .$$

Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que la restriction à S de la fonction q_M est bornée et atteint sa borne inférieure $\alpha = \inf\limits_{\|x\|=1} q_M(x)$ et sa borne supérieure $\beta = \sup\limits_{\|x\|=1} q_M(x)$.

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M. On pose

$$\lambda_{\min}(M) = \inf_{k \in \{1,\dots,n\}} \lambda_k \quad , \quad \lambda_{\max}(M) = \sup_{k \in \{1,\dots,n\}} \lambda_k\ .$$

Montrer que $\alpha = \lambda_{\min}(M)$ et que $\beta = \lambda_{\max}(M)$.

3. Déduire de la question **2.** les équivalences suivantes :

a) M est positive si et seulement si $\lambda_{\min}(M) \geq 0$.

b) M est définie positive si et seulement si $\lambda_{\min}(M) > 0$.

c) M est définie positive si et seulement si M est positive et inversible.

4. On suppose dans cette question que M est *définie positive*. Soit c un élément de $\mathbb{R}^n$ et r un nombre réel. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f_{_M}(x) = q_{_M}(x) + 2(c|x) + r \ .$$

a) Montrer que $f_{_M}$ possède un point critique unique, $x_0 = -M^{-1}c$.

b) Montrer que $f_{_M}(x_0)$ est la borne inférieure de $f_{_M}$ sur $\mathbb{R}^n$.

Deuxième partie : l'addition parallèle

5. Soient a et b deux nombres réels, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b > 0$. On pose $a//b = \dfrac{ab}{a+b}$, et l'on appelle $a//b$ la *somme parallèle* de a et b.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(a//b)x^2 = \inf_{\substack{y+z=x \\ y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}}} (ay^2 + bz^2) \ .$$

b) Pour quels couples (y_0, z_0) de nombres réels, de somme x, la relation

$$(a//b)x^2 = ay_0^2 + bz_0^2$$

est-elle satisfaite ?

c) Interpréter physiquement les résultats précédents en prenant pour y et z les intensités des courants électriques qui traversent des circuits montés en parallèle comportant des résistances a et b.

6. On généralise la notion de somme parallèle à certaines matrices symétriques. Soient $A \in \mathcal{S}_n$ et $B \in \mathcal{S}_n$. On suppose dans toute la suite du problème que A et B sont positives et que l'une d'elles au moins est définie positive.

a) Montrer que $A + B$ est inversible et que

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A = A - A(A+B)^{-1}A = B - B(A+B)^{-1}B \ .$$

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le nombre réel

$$\inf_{\substack{y+z=x \\ y\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^n}} \big((Ay|y) + (Bz|z)\big)$$

existe et est égal à $(Mx|x)$, où M est une matrice symétrique positive, que l'on déterminera en fonction de A et B. (On pourra utiliser les résultats de la question **4.**).

c) Que vaut M si A et B appartiennent à $\mathcal{S}_1$?

Dans toute la suite, on notera $M = A//B$, et l'on appellera $A//B$ la somme parallèle de A et B.

7.a) Montrer que $A//B = B//A$.

b) Montrer que, si A est définie positive,

$$A//B = (BA^{-1} + I)^{-1}B \ .$$

c) Montrer que, si A et B sont définies positives,

$$A//B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1} \ .$$

8.a) Calculer $A//B$ lorsque A et B sont diagonales.

b) Que peut-on dire de $A//B$ lorsque $AB = BA$?

9. On suppose que A et B sont définies positives. Montrer que, pour toute matrice $C \in \mathcal{S}_n$ positive,

$$(A//B)//C = A//(B//C) \ .$$

10. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique couple (y_0, z_0) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} y_0 + z_0 = x, \\ ((A//B)x|x) = (Ay_0|y_0) + (Bz_0|z_0), \\ (A//B)x = Ay_0 = Bz_0 \ . \end{cases}$$

11. *Interprétation physique.*

De manière schématique, un réseau électrique d'ordre n est un ensemble de n « entrées/sorties » couplées (voir figure 1) obéissant à la loi d'Ohm généralisée $U = AI$:
– la « tension » U est le vecteur de composantes $(u_1, \dots, u_n)$, u_k étant la tension entre l'entrée n° k et la sortie n° k ;
– le « courant » I est le vecteur de composantes $(i_1, \dots, i_n)$;
– A est la « résistance généralisée » du réseau, décrite par une matrice symétrique positive.
La puissance dissipée dans le réseau est alors $P = (U|I)$.

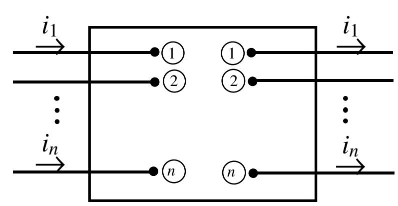

Figure 1

Si deux réseaux d'ordre n, de résistances généralisées A et B sont montés en parallèle (voir figure 2), alors $(A//B)$ est la résistance généralisée équivalente. La répartition du courant dans les deux réseaux se fait suivant la loi de Kirchhoff, $I = I_1 + I_2$.

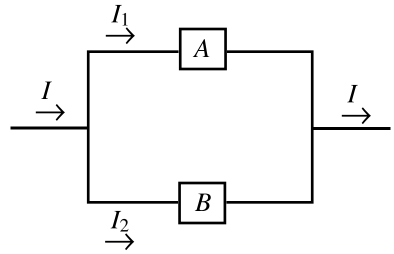

Figure 2

Interpréter physiquement les résultats des questions **9.** et **10.**.

Troisième partie : quelques propriétés de la somme parallèle

12.a) Montrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$,

$$((A//B)x|x) \leq (Ax|x)//(Bx|x) \ .$$

b) Montrer que si $A, B, C, D \in \mathcal{S}_n$ sont positives et si A et B sont définies positives, pour tout x dans $\mathcal{R}^n$,

$$((A//C)x|x) + ((B//D)x|x) \leq \Big(((A+B)//(C+D))x|x\Big) \ .$$

Interpréter physiquement cette inégalité.

c) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ des nombres réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i // \beta_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) // \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right) \ .$$

d) En déduire que les traces des matrices A, B et $A//B$, vérifient

$$Tr(A//B) \leq (Tr\, A)//(Tr\, B) \ .$$

13.a) Montrer que tout vecteur propre commun à A et B est vecteur propre de $A//B$.

b) Montrer que

$$\lambda_{\min}(A//B) \geq \lambda_{\min}(A)//\lambda_{\min}(B) \ .$$

c) L'inégalité précédente peut-elle être stricte ?

* *
*