ENS ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SESSION DE 1998

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Il sera accordé une grande importance à la qualité et à la précision de la rédaction de ce problème. Chaque partie est indépendante des autres, et tout résultat énoncé dans le texte pourra être utilisé dans la suite sans nécessairement avoir été démontré par le candidat.

Ce problème est consacré à l'approximation de fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ par des fonctions polynômes.

NOTATIONS

• Etant donnés deux réels a et b avec $a < b$, on note I l'intervalle $[a, b]$.

• L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est désigné par C^0. Pour n entier, $n \geq 1$, C^n désigne l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées $k-$ièmes, pour $1 \leq k \leq n$, sont continues. Pour $n \geq 1$ et $f \in C^n$, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n-$ième de f. On notera aussi f'' la dérivée seconde d'un élément de C^2. L'ensemble C^∞ des fonctions de classe C^∞ est l'intersection des ensembles C^n, $n \geq 0$.

• Soit σ une partie finie de $[a, b]$ contenant a et b. On note

$$\sigma = \{a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$$

avec

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_n < a_{n+1} = b.$$

On dit alors que σ est une subdivision de $I = [a, b]$, de longueur n. On remarque que le cardinal de σ est $n + 2$. Le pas de σ, noté $h(\sigma)$, est le réel positif $h(\sigma) = \mathrm{Max}\{(a_{j+1} - a_j), 0 \leq j \leq n\}$.

• A une subdivision $\sigma = \{a_0, ..., a_{n+1}\}$ de longueur n, on associe la fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ de degré n, notée S, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ S(t) = \prod_{i=1}^{i=n}(t - a_i).$$

PRELIMINAIRES

Dans ces questions préliminaires, le candidat démontrera certains résultats qui seront utiles dans le problème.

0.1. Montrer que si une fonction ϕ élément de $\mathcal{C}^2$ possède trois zéros distincts dans l'intervalle $]a,b[$, alors ϕ'' s'annule en au moins un point de l'intervalle $]a,b[$.

0.2. Soit $I = [-1,1]$ et f la fonction définie sur I par
- si $x = 0$, $f(x) = 0$,
- si $x \neq 0$, $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$.

0.2.1. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_m tel que, pour tout x dans I, $x \neq 0$, $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2})$.

0.2.2 En déduire que $f^{(m)}(0) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et que f est élément de $\mathcal{C}^\infty$.

0.3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $(u_n/n)_{n\in\mathbb{N},n\geq 1}$ converge vers une limite l lorsque n tend vers $+\infty$ et $(v_n/n)_{n\in\mathbb{N},n\geq 1}$ converge vers une limite l' lorsque n tend vers $+\infty$, ces limites vérifiant $l > l'$. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

0.4. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, que l'on déterminera, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \forall k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n \Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{k}{n}\right| \geq Cn^{-2}.$$

PARTIE I

L'intervalle I étant fixé, on se donne une subdivision $\sigma = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ de longueur $n \geq 1$ et une fonction f élément de $\mathcal{C}^0$.

1. Nous construisons ici un polynôme d'interpolation pour f.

1.1. Montrer qu'il existe une fonction polynôme $L(f)$, de degré au plus égal à $n-1$, vérifiant

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \quad L(f)(a_i) = f(a_i).$$

[On pourra chercher $L(f)$ comme combinaison linéaire des fonctions polynômes $S_{(i)}$, où $S_{(i)}(t) = \prod_{j\in\{1,\ldots,n\}, j\neq i}(t - a_j)$.]

1.2. Montrer que le polynôme $L(f)$ est unique. On dit que $L(f)$ est le polynôme d'interpolation de f associé à σ.

1.3. Soit $\sigma = \{a, a_1, a_2, b\}$ une subdivision telle que $n = 2$. Donner l'expression de $L(f)$ en fonction de $a_1, a_2, f(a_1), f(a_2)$.

1.4. Pour chaque $n \geq 2$ et pour toute subdivision σ de longueur n, donner un exemple d'une fonction f non nulle élément de C^0 telle que le polynôme $L(f)$ d'interpolation de f associé à σ soit de degré exactement égal à $n - 2$.

2. On suppose que f est élément de C^n, et l'on souhaite démontrer la propriété:

$$(P) \quad \forall x \in I, \exists \xi \in I, f(x) = L(f)(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} S(x).$$

2.1. Pourquoi peut-on supposer sans restreindre la généralité que $x \in I$, $x \notin \sigma \cap]a, b[$?

2.2. Justifier *(P)* dans le cas où $n = 1$.

2.3. Plaçons-nous maintenant dans le cas où la longueur de la subdivision est $n = 2$. Dans ce cas, $\sigma = \{a, a_1, a_2, b\}$.

2.3.a On introduit, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, la fonction $\phi : I \to \mathbf{R}$ définie par

$$\phi(t) = f(t) - L(f)(t) - \lambda S(t).$$

On considère un point x de I qui n'appartient pas à la subdivision. Déterminer λ de sorte que $\phi(x) = 0$.

2.3.b Le point x étant fixé et le réel λ étant ainsi choisi, donner trois zéros distincts de la fonction ϕ dans l'intervalle $]a, b[$.

2.3.c Vérifier *(P)* en utilisant **0.1.**.

2.4. Montrer la propriété *(P)* dans le cas n quelconque ($n \geq 3$). [On pourra utiliser à nouveau la fonction ϕ introduite en **2.3.a.**] [On ne cherchera pas à faire un raisonnement par récurrence sur n.]

PARTIE II

L'intervalle I est toujours fixé. On se donne une subdivision σ, à laquelle sont associés sa longueur n, son polynôme S et son pas $h(\sigma)$. On se propose de déduire de (P) une estimation de $f - L(f)$ sur I. Pour cela, on va majorer S et étudier une classe de fonctions f pour lesquelles on a une majoration de $f^{(m)}$ pour tout m.

3. Nous nous proposons de démontrer

$$\forall x \in I, |S(x)| \leq n!(h(\sigma))^n. \tag{1}$$

3.1. Vérifier la majoration (1) dans les cas $n = 1$ et $n = 2$.

On considèrera désormais $n \geq 3$. Pour $x \in I$, x n'appartenant pas à la subdivision, soit j l'unique entier, $0 \leq j \leq n$, tel que $a_j < x < a_{j+1}$.

3.2. Démontrer la majoration (1) lorsque $j = 0$ et lorsque $j = n$. [On pourra utiliser la relation $a_p - x = a_1 - x + \sum_{2 \leq q \leq p}(a_q - a_{q-1})$.]

3.3. On suppose $0 < j < n$. Majorer

$$\prod_{p=1}^{j-1}(x - a_p)$$

ainsi que

$$\prod_{q=j+1}^{q=n}(a_q - x).$$

3.4. Démontrer la majoration (1).

4. Pour $M > 0$, on définit l'ensemble

$$E_M = \{f \in \mathcal{C}^\infty, \forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f^{(m)}(x)| \leq M^{m+1}\}.$$

On définit $E = \cup_{M>0} E_M$. On étudie l'appartenance de fonctions classiques à E.

4.1. Montrer que, pour chaque ω dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin \omega x$ et la fonction $x \mapsto e^{\omega x}$ sont dans E.

4.2. Démontrer que toutes les fonctions polynômes sont dans E.

4.3. Montrer que, si $f \in E_M$, pour tout x dans I, la série $\sum_{m\geq 0} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m$ est absolument convergente et que sa somme vaut $f(x)$.

4.4. La fonction f étudiée en **0.2.** appartient-elle à E ?

5. Soit $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}, m \geq 1}$ une suite de subdivisions de I. On suppose que la longueur de la subdivision σ_m est m et que

$$\lim_{m \to +\infty} h(\sigma_m) = 0.$$

Soit $f \in E$. On note $L_m(f)$ le polynôme d'interpolation de f associé à la subdivision σ_m construit à la question **1.**. Démontrer que la suite $(L_m(f))_{m \in \mathbb{N}, m \geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.

PARTIE III

Nous considérons dans cette partie l'intervalle $I = [-1, 1]$, et, pour α réel strictement positif, la fonction $f_\alpha(x) = (x^2 + \alpha^2)^{-1}$.

6. Soit σ une subdivision de I, de longueur n. On suppose que la subdivision est symétrique, c'est-à-dire que si $x \in \sigma$, $-x \in \sigma$. On note $L(f_\alpha)$ le polynôme d'interpolation de f_α associé á σ défini dans la question **1.**, vérifiant

$$\forall x \in \sigma \cap]-1, 1[, \quad L(f_\alpha)(x) = f_\alpha(x).$$

On rappelle que toute fonction polynôme sur $\mathbb{R}$ est aussi une fonction polynôme sur $\mathbb{C}$. On désigne par i la racine carrée usuelle de -1. On établit ici une égalité d'interpolation pour f_α.

6.1. Démontrer que la fonction polynôme S est paire (respectivement impaire) lorsque n est pair (respectivement impair).

6.2. On suppose n impair. Démontrer l'égalité entre fonctions polynômes (dont on étudiera le degré):

$$1 - (t^2 + \alpha^2)L(f_\alpha)(t) = \frac{tS(t)}{i\alpha S(i\alpha)}. \tag{2}$$

6.3. Etablir une égalité similaire si n est pair.

Dans les questions qui suivent, nous nous donnons, pour chaque entier $n \geq 1$, la subdivision π_n de $I = [-1, 1]$, constituée des points $\frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $-n \leq k \leq n$. Notons alors que

$$\pi_n = \{\frac{k}{n}, k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n\}.$$

Cette subdivision est de longueur $2n - 1$, impaire. On associe, comme dans les Notations, à la subdivision π_n le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \prod_{k=-n+1}^{k=n-1} (t - \frac{k}{n}).$$

On note $R_n(f_\alpha)$ le polynôme d'interpolation de f_α associé à la subdivision π_n défini dans la question 1..

7. On étudie dans cette question un équivalent de $\frac{1}{n} \ln |P_n(i\alpha)|$.

7.1. On pose $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \ln(t^2 + \alpha^2)dt$. Calculer $\Phi(\alpha)$ à l'aide de fonctions usuelles. Quelle est la limite de $\Phi(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs positives?

7.2. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\ln|P_n(i\alpha)|\right) = \Phi(\alpha).$$

[On remarquera que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $(z - k/n)(z + k/n) = z^2 - k^2/n^2$.].

8. On se propose d'étudier un équivalent de $\frac{1}{n}\ln|P_n(\frac{1}{\sqrt{2}})|$.

8.1. Soit $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$. Démontrer qu'il existe $k(n) \in \mathbf{N}$ tel que $k(n) < \frac{n}{\sqrt{2}} < k(n) + 1$. Démontrer qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_0$, on ait $k(n) + 2 \leq n - 1$ et $k(n) - 2 \geq -n$. On considèrera dans la suite $n \geq N_0$.

8.2. Calculer, pour tout $x \in [-1, 1]$, la fonction $\Psi(x) = \int_{-1}^{1} \ln|t - x|dt$. Montrer que $\Psi(\frac{1}{\sqrt{2}}) > -2$. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de

$$\int_{\frac{k(n)-1}{n}}^{\frac{k(n)+2}{n}} \ln|t - \frac{1}{\sqrt{2}}|dt.$$

8.3. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites $(w'_n)_{n\in\mathbf{N},n\geq1}$ et $(w"_n)_{n\in\mathbf{N},n\geq1}$ définies, pour $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$, par $w'_n = \frac{1}{n}\ln|\frac{k(n)}{n} - \frac{1}{\sqrt{2}}|$ et $w"_n = \frac{1}{n}\ln|\frac{k(n)+1}{n} - \frac{1}{\sqrt{2}}|$.

8.4. Soit ψ une fonction continue et croissante sur $[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ et continue et décroissante sur $]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$. On suppose que ψ est intégrable sur $[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$.

Pour $p \geq k(n) + 1$, comparer $\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} \psi(t)dt$ et les réels $\frac{1}{n}\psi(\frac{p}{n})$ et $\frac{1}{n}\psi(\frac{p+1}{n})$. Etablir des inégalités analogues pour $p \leq k(n) - 1$.

8.5. Donner, pour $n \geq N_0$, un encadrement de $\int_{\frac{k(n)+2}{n}}^{1} \psi(t)dt$ et un encadrement de $\int_{-1}^{\frac{k(n)-1}{n}} \psi(t)dt$ utilisant respectivement

$$\frac{1}{n}\sum_{p=k(n)+2}^{p=n} \psi(\frac{p}{n}) \quad , \quad \frac{1}{n}\sum_{p=-n}^{p=k(n)-1} \psi(\frac{p}{n}),$$

et les réels $\psi(\frac{k(n)+2}{n})$, $\psi(1)$, $\psi(\frac{k(n)-1}{n})$, $\psi(-1)$.

8.6. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{p\in\mathbf{N},-n\leq p\leq n,p\neq k(n),p\neq k(n)+1} \ln|\frac{p}{n} - \frac{1}{\sqrt{2}}|$$

converge vers $\Psi(\frac{1}{\sqrt{2}})$. [On choisira une fonction ψ particulière.].

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\ln|P_n(\frac{1}{\sqrt{2}})|\right)=\Psi(\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

9. Démontrer qu'il existe un réel α_0, $\alpha_0>0$ et un point $x\in]-1,1[$ tel que la suite $(R_n(f_{\alpha_0})(x)-f_{\alpha_0}(x))_{n\geq 1}$ tende vers l'infini. Est ce que la fonction f_{α_0} appartient à l'ensemble E défini dans la question **4.**?

10. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des réels $x_0\in[-1,1]$ tels que

$$\exists r\in\mathbf{N}, r\geq 2, \exists C>0, \forall n\in\mathbf{N}, n\geq 1, \forall k\in\mathbb{Z}, |k|\leq n, |x_0-\frac{k}{n}|\geq\frac{C}{n^r}.$$

Montrer que, pour $x\in\mathcal{A}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|P_n(x)|=\Psi(x).$$

11. Soit $\alpha>0$. Déterminer en fonction de α le plus grand intervalle ouvert J_α, inclus dans $[-1,1]$ où la suite $(R_n(f_\alpha)(x))_{n\in\mathbf{N},n\geq 1}$ converge vers $f_\alpha(x)$ pour tout x de $J_\alpha\cap\mathcal{A}$. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\alpha\in J_\alpha$.

12. Soit x_0 un réel non rationnel tel qu'il existe un polynôme Q_r, de degré r, dont les coefficients sont entiers, tel que $Q_r(x_0)=0$ et $Q'_r(x_0)\neq 0$. Démontrer que $x_0\in\mathcal{A}$.