DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Tournez la page S.V.P.

La plus grande attention sera accordée à la rigueur et à la clarté de la rédaction.

Un résultat énoncé dans une question peut être utilisé dans la suite sans démonstration.

Au cours de ce problème nous étudierons certaines propriétés de la fonction u lorsqu'elle est solution de l'équation différentielle ordinaire (parties II et III)

$$-u''(x) + V(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in [0,1], \tag{1}$$

ou lorsque qu'elle est solution non nulle de l'équation différentielle ordinaire (partie IV)

$$-u''(x) + V(x)u(x) = \lambda u(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in [0,1]. \tag{2}$$

Dans tout le problème, f est une fonction de classe C^∞ donnée sur l'intervalle $[0,1]$ et V est une fonction de classe C^∞ strictement positive donnée sur l'intervalle $[0,1]$. On sait qu'il existe alors un nombre réel strictement positif V_0 tel que

$$V(x) \geq V_0 > 0, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{3}$$

PARTIE I : préliminaires

1.1. Soit u une solution de l'équation différentielle (1). Montrer que u est de classe C^∞ sur l'intervalle $[0,1]$.

1.2. Soit (a,b,c) trois nombres réels donnés.

Discuter suivant les valeurs de a, b et c le nombre de solutions de l'équation (1) vérifiant les conditions initiales

$$u(0) = a, \quad u'(0) = b, \quad u''(0) = c.$$

1.3 Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il à l'équation (1) avec les conditions

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \ ? \tag{4}$$

1.4 Soit v une fonction de classe C^2 sur un intervalle $[x_1, x_2]$. On suppose que v possède un minimum local en $x_0 \in]x_1, x_2[$. Montrer que

$$v'(x_0) = 0 \text{ et } v''(x_0) \geq 0.$$

PARTIE II

L'objectif de cette partie est de montrer qu'il y a existence et unicité de la solution du problème (1) avec les conditions (4).

2.1 On suppose que f est une fonction positive : $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$. Soit u une solution de l'équation (1).

- Montrer que si u possède un minimum local en $x_0 \in]0,1[$ alors $u(x_0) \geq 0$.
- Montrer que si u vérifie les conditions (4) alors

$$u(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

2.2 On suppose que f est une fonction négative : $f(x) \leq 0$, $\forall x \in]0,1[$. Montrer que si u est solution de l'équation (1) et vérifie les conditions (4) alors

$$u(x) \leq 0, \quad \forall x \in [0,1].$$

2.3 Soit b un nombre réel donné. Soit $u_b \; : x \to u_b(x)$ la solution de l'équation (1) avec les conditions initiales $u_b(0) = 0$ et $u_b'(0) = b$. On pose

$$\varphi(b) = u_b(1).$$

Montrer que φ est une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2.4 Montrer que φ est une application injective.

2.5 Montrer l'existence et l'unicité de la solution de

$$\begin{cases} -u''(x) + V(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

PARTIE III

Dans cette partie nous étudions une méthode d'approximation numérique de la solution u du système (5).

On considère le vecteur $\bar{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $n \geq 2$. Les composantes de $\bar{u}$ sont notées $u_i = (\bar{u})_i$, $i = 0, ..., n$. On pose $\Delta x = \frac{1}{n}$, $V_i = V(i\Delta x)$ et $f_i = f(i\Delta x)$. On considère le système linéaire

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \dfrac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{(\Delta x)^2} + V_i u_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ u_n = 0. \end{cases} \tag{6}$$

3.1 On suppose que $f_i \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., n-1$. On fait l'hypothèse que $\bar{u}$ est une solution du système (6).

Montrer que $u_i \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., n-1$.

Indication : on pourra introduire $u_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n-1}(u_i)$.

3.2. Montrer que le système (6) possède une solution unique.

3.3 Soit u la solution de (5) et $\bar{u}$ la solution de (6). On pose $v_i = u_i - u(i\Delta x)$. Montrer que

$$\frac{-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}}{(\Delta x)^2} + V_i v_i = \varepsilon_i, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

avec

$$\varepsilon_i = -u''(i\Delta x) - \frac{-u((i-1)\Delta x) + 2u(i\Delta x) - u((i+1)\Delta x)}{(\Delta x)^2}.$$

En déduire l'inégalité

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{1}{12} \times \left(\max_{x \in [(i-1)\Delta x, (i+1)\Delta x]} |u^{(4)}(x)| \right) (\Delta x)^2, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$u^{(4)}(x)$ désignant la dérivée quatrième de u au point x.

3.4 On pose

$$E = \max_{1 \leq i \leq n-1} |\varepsilon_i|.$$

Soit pour $i = 0, ..., n$,

$$w_i = v_i - \frac{E}{2} \frac{i(n-i)}{n^2}.$$

Montrer que pour $i = 0, ..., n$

$$w_i \leq 0.$$

3.5 Soit pour $i = 0, ..., n$,

$$z_i = v_i + \frac{E}{2} \frac{i(n-i)}{n^2}.$$

Montrer que pour $i = 0, ..., n$

$$z_i \geq 0.$$

3.6 En déduire que

$$|u_i - u(i\Delta x)| \leq \frac{1}{96} \left(\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| \right) (\Delta x)^2, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Que peut-on dire quand $n \to +\infty$?

3.7 On pose $l_i = V_i u_i - f_i$ pour $i = 0, ..., n$. Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$|l_i - u''(i\Delta x)| \leq A \left(\max_{x\in[0,1]} |u^{(4)}(x)| \right) (\Delta x)^2, \quad 0 \leq i \leq n.$$

3.8 Soit la fonction ℓ définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$\ell(i\Delta x) = l_i \text{ pour } 0 \leq i \leq n,$$

et

$$\ell(x) = l_i + \frac{x - i\Delta x}{\Delta x}(l_{i+1} - l_i) \text{ pour } x \in]i\Delta x, (i+1)\Delta x[, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Montrer qu'il existe une constante $B > 0$, telle que

$$|\ell(x) - u''(x)| \leq B \left(\max_{x\in[0,1]} |u^{(4)}(x)| \right) (\Delta x)^2, \quad \forall x \in [0, 1].$$

3.9 Montrer que pour la solution u de (5)

$$u'(0) = -\int_0^1 \left(\int_0^y u''(t)dt \right) dy.$$

En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ ainsi qu'une combinaison linéaire des l_i, que l'on notera M, telle que

$$|M - u'(0)| \leq C \left(\max_{x\in[0,1]} |u^{(4)}(x)| \right) (\Delta x)^2.$$

PARTIE IV

Dans cette partie on conserve l'hypothèse (3) faite sur V, et on considère pour $\lambda \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} -u''(x) + V(x)u(x) = \lambda u(x), & \forall x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Nous allons étudier pour quelles valeurs de λ ce système possède une solution non identiquement nulle.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \to u_\lambda(x)$ la solution de l'équation (2) avec $u_\lambda(0) = 0$ et $u'_\lambda(0) = 1$. On pose

$$\Psi(\lambda) = u_\lambda(1).$$

Tournez la page S.V.P.

4.1 Montrer que le système (7) possède une solution non identiquement nulle si et seulement si $\Psi(\lambda) = 0$.

4.2 Montrer que pour toute solution du système (7)

$$\int_0^1 \left(u'(x)^2 + V(x)u(x)^2\right) dx = \lambda \int_0^1 u(x)^2 dx.$$

4.3 On suppose que $\lambda \leq V_0$. Existe-t-il des solutions non identiquement nulles du système (7) ?

Dans les questions qui suivent on suppose que $\lambda > V_0$ et on pose $\alpha = \sqrt{\lambda}$.

4.4 Montrer que

$$u_\lambda(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} + \int_0^x \frac{\sin(\alpha(x-s))}{\alpha} V(s) u_\lambda(s) ds, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{8}$$

4.5 On pose

$$h_\lambda(x) = \alpha \left(u_\lambda(x) - \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \right).$$

Montrer que

$$h_\lambda(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \sin(\alpha(x-s)) V(s) h_\lambda(s) ds$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \int_0^x \sin(\alpha(x-s)) \sin(\alpha s) V(s) ds, \quad \forall x \in [0,1].$$

4.6 Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de λ, que l'on déterminera, telle que

$$\max_{x\in[0,1]} |h_\lambda(x)| \leq \frac{C_1}{\alpha}, \qquad \forall \lambda \geqslant (2 \max_{x\in[0,1]} |V(x)|)^2$$

4.7 On considère le cas $\lambda = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2$ lorsque k est entier. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0, \quad \Psi((\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^2) > 0.$$

4.8 On considère le cas $\lambda = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^2$ lorsque k est entier. Montrer qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_1, \quad \Psi((\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)^2) < 0.$$

4.9 Soient $\lambda > V_0$ et $\mu > V_0$ deux nombres réels. On pose $g_{\lambda,\mu}(x) = u_\lambda(x) - u_\mu(x)$.

Montrer qu'il existe deux constantes $C_2 > 0$ et $C_3 > 0$ telles que

$$|g_{\lambda,\mu}(x)| \leq C_2|\lambda - \mu| + C_3 \int_0^x |g_{\lambda,\mu}(s)|ds, \quad \forall x \in [0,1].$$

On pourra utiliser la représentation intégrale (8).

Soit la fonction $I_{\lambda,\mu}(x) = \int_0^x |g_{\lambda,\mu}(s)|ds$. Montrer qu'il existe une constante $C_4 > 0$ telle que

$$I_{\lambda,\mu}(x) \leq C_4|\lambda - \mu|, \quad \forall x \in [0,1].$$

4.10 Montrer la continuité de la fonction Ψ pour $\lambda > V_0$.

4.11 Montrer qu'il existe une suite infinie $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe une solution non identiquement nulle du système (7) pour $\lambda = \lambda_n$,

c) λ_n tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.