

Polytechnique — 1999

Physique I — MP*

Collisions nucléaires et fragmentation

I . – Analyse cinématique d’une collision

I .1. – Cinématique du problème à deux corps.

I .1.a. – Le position relative est $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ et, par définition, le centre de masse est repéré par $\mathbf{R}_G = \frac{A_1\mathbf{r}_1 + A_2\mathbf{r}_2}{A_1 + A_2}$, où A_i est le nombre de masse du noyau “ i ”. Alors

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_G - \frac{A_2}{A_1 + A_2} \mathbf{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_G + \frac{A_1}{A_1 + A_2} \mathbf{r}.$$

I .1.b. – La masse réduite du mobile est $\mu = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m$. Puisque $A_i \mathbf{p}_j = m A_i A_j \mathbf{v}_j$, on pourra écrire $\mathbf{p} = m \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$, soit

$$\mathbf{p} = \mu \mathbf{v}.$$

I .1.c. – On a $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$; en désignant par \mathbf{v}_i^* la vitesse barycentrique du noyau “ i ”, il vient $\mathbf{v}_1^* = -\frac{A_2}{A_1 + A_2} \mathbf{v}$ et $\mathbf{v}_2^* = \frac{A_1}{A_1 + A_2} \mathbf{v}$, donc

$$\mathbf{m} A_2 \mathbf{v}_2^* = \mathbf{p} = -\mathbf{m} A_1 \mathbf{v}_1^*.$$

Le moment cinétique barycentrique est $\ell = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_G) \times \mathbf{p}_1^* + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_G) \times \mathbf{p}_2^*$, soit $\ell = \frac{A_2}{A_1 + A_2} \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \frac{A_1}{A_1 + A_2} \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donc

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

La quantité de mouvement totale du système est $\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m(A_1 + A_2)\mathbf{v}_G$ (où $\mathbf{V}_G = \dot{\mathbf{R}}_G$) et le moment cinétique total est $\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$, soit, d'après I .1.a.,

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}_G \times (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \mathbf{r} \times \frac{A_1\mathbf{p}_2 - A_2\mathbf{p}_1}{A_1 + A_2} = \mathbf{R}_G \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$
 ou encore

$$\underline{\mathbf{L} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{R}_G \times \mathbf{P}.}$$

I .2. – Énergie cinétique.

Le théorème de König affirme que l'énergie cinétique d'un système est la somme de son énergie cinétique barycentrique $E_c^* = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^{*2} + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^{*2}$ et de l'énergie cinétique d'une particule fictive, située en G ou serait concentrée toute la masse du système. Cette énergie est $E_c(G) = \frac{1}{2}m(A_1 + A_2)\mathbf{V}_G^2$.

Dans le cas d'une cible fixe, on aura, lorsque les deux noyaux sont infiniment éloignés,

$$\mathbf{V}_G = \frac{A_2}{A_1 + A_2} \mathbf{v}_2$$
 et

$$E_c(G) = \frac{A_2^2 m}{2(A_1 + A_2)} \mathbf{v}_2^2 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} E_{\text{lab}}$$

L'énergie cinétique barycentrique s'écrit, elle, d'après I .1.c.,

$$E_c^* = \frac{\mu^2}{2m_1} \mathbf{v}^2 + \frac{\mu^2}{2m_2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2.$$

I .3. – Énergie potentielle d'interaction coulombienne.

I .3.a. – Le problème étant à symétrie sphérique, le champ électrique est radial et s'écrit $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$. Le théorème de Gauss appliqué à la sphère de rayon $r > R$ conduit alors à $4\pi r^2 E(r) = Q/\varepsilon_0$, d'où, avec $E(r)\mathbf{u}_r = -\mathbf{grad} V = (dV/dr)\mathbf{u}_r$ (le potentiel ne peut dépendre que de r si le champ est radial),

$$\underline{E(r > R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \quad \text{et} \quad V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},}$$

où l'on a pris $V = 0$ à l'infini. Pour $r < R$, le théorème de Gauss donne $4\pi r^2 E(r) = Qr^3/\varepsilon_0 R^3$, et, le potentiel étant continu en $r = R$ (sinon le champ $E(R)$ ne serait pas défini),

$$\underline{E(r < R) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \mathbf{u}_r \quad \text{et} \quad V(r < R) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2).}$$

I .3.b. – L'énergie d'une charge q dans le champ d'une charge Q est $E_{\text{el}} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$, donc, pour les deux noyaux,

$$\underline{E_{\text{el}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.}$$

II . – Collision et évolution du système composite

II .1. – Énergie du système avant le contact.

II .1.a. – L'énergie totale du système est la somme des énergies cinétiques des deux noyaux, de leur énergie d'interaction électrostatique et de leur énergie propre de liaisons nucléaires. Par conséquent,

$$\underline{E = E_c + E_{\text{el}} + U_{\text{b}}.}$$

II .1.b. – Le système n'évoluant que sous l'effet de forces intérieures, son centre de masse est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

II .1.c. – D'après I .2., dans le cas de noyaux identiques, 50% de l'énergie cinétique est perdue dans le mouvement du centre de masse. Alors $E_c(G) = E_{\text{lab}}/2 = E_c^*(\infty)$, puisque l'on doit avoir $E_c(\infty) = E_{\text{lab}} = E_c^*(\infty) + E_c(G)$

II .1.d. – Le principe de Newton appliqué au projectile donne $\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{el}} = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$. Le mobile équivalent est donc soumis à la même force que le projectile ; cette force est centrale, donc le mouvement sera plan. Le mobile équivalent décrit une portion de conique tant que les deux noyaux ne sont pas entrés en contact.

II .1.e. – Plaçons nous en coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire. Le mobile fictif est alors repéré par $\mathbf{r} \equiv (r, \theta)$. L'énergie cinétique barycentrique, qui est aussi celle du mobile fictif, s'écrit $\frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$. D'autre part, le moment cinétique de ce mobile est $\ell = \mu r \mathbf{u}_r \times (\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta)$, d'où

$$\ell = \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{u}_z,$$

où \mathbf{u}_z est perpendiculaire au plan de la trajectoire. On écrira donc

$$E_c^* = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2},$$

et on aura

$$\underline{E^* = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + E_{\text{el}} + U_{\text{b}}.}$$

II .2. – Barrière coulombienne.

II .2.a. – On a clairement (cf. ci-contre)

$$\begin{cases} V_{\text{tot}} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r > R \\ V_{\text{tot}} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) - V_0 & \text{si } r < R \end{cases}$$

pour un proton, et

$$\begin{cases} V_{\text{tot}} = 0 & \text{si } r > R \\ V_{\text{tot}} = -V_0 & \text{si } r < R \end{cases}$$

pour un neutron

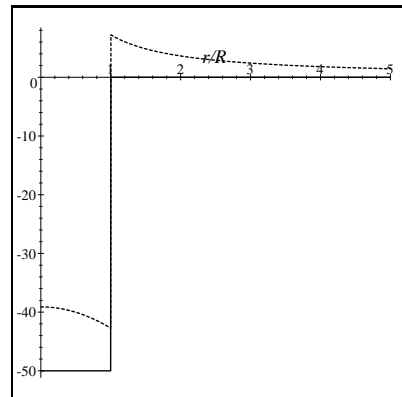
II .2.b. – Le noyau projectile étant repoussé par le noyau cible, il devra vaincre une barrière de potentiel coulombienne pour parvenir au contact.

Pour évaluer la hauteur de cette barrière, on notera qu'au moment du contact, la distance entre les deux centres est $2R$, d'où

$$U_{\text{coul}} = \frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Numériquement, $U_{\text{coul}} = 72,6$ MeV.

II .2.c. – À l'infini, $E^* = E_c^*(\infty) + U_{\text{b}} = \frac{1}{2}E_{\text{lab}} + U_{\text{b}}$ puisque les deux autres termes ($\ell^2/2\mu r^2$ et E_{el} sont nuls).



V_{tot} en MeV en fonction de r/R (pointillés=proton, plein=neutron).

On aura contact si, lorsque $r = 2R$, la vitesse radiale \dot{r} est toujours négative (i.e. ne s'est pas annulée depuis le départ du projectile). Ceci impose

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E^* - \frac{\ell^2}{8\mu R^2} - U_b - U_{\text{coul}} > 0,$$

condition qui se résume donc à

$$\frac{1}{2}E_{\text{lab}} - \frac{\ell^2}{8\mu R^2} - U_{\text{coul}} > 0.$$

Le moment cinétique étant constant, il est égal à sa valeur à l'infini, soit $\ell = \mu bv(\infty)$, d'où $\ell^2 = \mu b^2 E_{\text{lab}}$. La condition de contact devient

$$\frac{E_{\text{lab}}}{2} \left[1 - \left(\frac{b}{2R} \right)^2 \right] > U_{\text{coul}}.$$

II .2.d. – Si le contact n'a pas lieu, la trajectoire des deux noyaux est hyperbolique.

II .2.e. – L'énergie minimale pour obtenir la fusion est atteinte lors d'un choc frontal ($b = 0$), et

$$E_{\text{lab}}^{\text{min}} = 2U_{\text{coul}} = 145 \text{ MeV}.$$

La première condition sur l'existence du contact permet alors d'écrire

$$\ell < 2R\sqrt{\mu(E_{\text{lab}} - E_{\text{lab}}^{\text{min}})} = R\sqrt{2Am(E_{\text{lab}} - E_{\text{lab}}^{\text{min}})}.$$

Si on prend $E_{\text{lab}} = 400 \text{ MeV}$, on a bien $E_{\text{lab}} > E_{\text{lab}}^{\text{min}}$. la fusion est possible, tant que le paramètre d'impact vérifie $\frac{b}{R} < \sqrt{1 - \frac{E_{\text{lab}}^{\text{min}}}{E_{\text{lab}}}} = 0.8$.

II .3. – Compression.

II .3.a. – L'énergie de rotation du système au moment du contact est

$$E_{\text{rot}} = \frac{\ell^2}{8\mu R^2}.$$

II .3.b. – La conservation de l'énergie impose alors

$$E_{\text{c,int}} + 2AU(\rho) = E^* - E_{\text{rot}},$$

où le membre de droite de l'égalité est conservé au cours du temps. L'énergie de liaison nucléaire (qui inclue l'énergie de répulsion électrostatique) est maintenant variable, alors qu'elle est constante avant le choc et égale à U_b .

L'énergie $E_{\text{c,int}}$ est l'énergie cinétique du mouvement radial de compression-expansion du système. Notons E_0 la valeur de cette énergie juste après la fusion. On a $E_0 > 0$ et le système commence par se comprimer. Le rayon du système décroît et la densité va donc croître, jusqu'à ce que ρ soit telle que $2AU(\rho) = E_0$. La compression cesse alors et on assiste à une expansion du système. Mais l'énergie $U(\rho)$ étant parabolique, il existe deux valeurs de ρ pour lesquelles on a $2AU(\rho) = E_0$; le système va donc subir une expansion jusqu'à cette deuxième valeur de la densité, puis se contractera à nouveau, etc.; il est donc animé d'un mouvement oscillatoire.

Aux deux densités qui vérifient $2AU(\rho) = E_0$, l'énergie $E_{\text{c,int}}$ est nulle donc $2AU(\rho) = E^* - E_{\text{rot}}$. On aura alors

$$\rho_{\text{min}}^{\text{max}} = \rho_0 \left(1 \pm \sqrt{\frac{18}{K} \left(\frac{E^* - E_{\text{rot}}}{2A} - U_0 \right)} \right).$$

II .3.c. – Dans le cas d'un choc frontal l'énergie de rotation est nulle ($\ell = 0$), et $E^* = E_{\text{lab}}/2 + U_b$, donc $\rho_{\text{min}} = 0,58\rho_0 = 0,088 \text{ fm}^{-3}$ et $\rho_{\text{max}} = 1,42\rho_0 = 0,22 \text{ fm}^{-3}$.

III . – Fragmentation du système composite formé

III .1. – Étude de la pression.

III .1.a. – La pression thermodynamique se définit comme $p = - \left(\frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial V} \right)_S$, où $U_{\text{int}} = 2AU(\rho)$ représente l'énergie interne.

III .1.b. – Si la température reste constamment nulle, l'entropie du système reste nulle selon le principe de Nernst et on écrira, en notant que $V = 2A/\rho$,

$$p = \rho^2 \left(\frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} \right)_{T=0}.$$

III .1.c. – L'équation d'état proposée conduit à

$$p = \frac{K}{9} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 (\rho - \rho_0).$$

III .1.d. – À l'équilibre, la pression est nulle. La pression devient positive si $\rho > \rho_0$ (compression); les contraintes mécaniques tendent alors à dilater le système. Inversement, pour $\rho < \rho_0$ (compression), la pression devient négative et le système se comprime. Il y a donc stabilité vis-à-vis des oscillations de densité.

La pression négative qui apparaît lorsque le système se dilate correspond aux forces de cohésion nucléaire qui empêchent les nucléons de sortir du noyau (cf. modèle du sac).

III .2. – Une équation d'état réaliste à température nulle.

III .2.a. – L'expression exacte de $U(\rho)$ est $U(\rho) = C\rho^{2/3} + t_0\rho + t_3\rho^2$. Posons $\rho = \rho_0(1 + \varepsilon)$ et développons en puissance de ε au voisinage de $\varepsilon = 0$. il vient

$$\begin{aligned} U(\rho) &= C\rho_0^{2/3} \left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{9}\varepsilon^2 \right) + t_0\rho_0(1 + \varepsilon) + t_3\rho_0^2(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2) \\ &= \left(C\rho_0^{2/3} + t_0\rho_0 + t_3\rho_0^2 \right) + \varepsilon \left(\frac{2}{3}C\rho_0^{2/3} + t_0\rho_0 + 2t_3\rho_0^2 \right) + \frac{\varepsilon^2}{18} \left(18t_3\rho_0^2 - 2C\rho_0^{2/3} \right) \\ &= U_0 + \frac{K}{18}\varepsilon^2. \end{aligned}$$

On a donc $U_0 = C\rho_0^{2/3} + t_0\rho_0 + t_3\rho_0^2$ et $0 = \frac{2}{3}C\rho_0^{2/3} + t_0\rho_0 + 2t_3\rho_0^2$, d'où

$$t_3 = \frac{C\rho_0^{2/3} - 3U_0}{3\rho_0^2} \quad \text{et} \quad t_0 = \frac{6U_0 - 4C\rho_0^{2/3}}{3\rho_0}.$$

A.N. : $t_0 = -396 \text{ MeV.fm}^2$ et $t_3 = 990 \text{ MeV.fm}^6$. $t_0 < 0$, c'est le terme de cohésion; $t_3 > 0$ c'est le terme d'expansion.

Alors $K = 4C\rho_0^{2/3} - 18U_0 = 374 \text{ MeV}$. On est loin des 250 MeV de l'énoncé!

III .2.b. – Dans ce modèle, la pression est $p = \frac{2}{3}C\rho^{5/3} + t_0\rho^2 + 2t_3\rho^3$.

III .2.c. – Les solutions de $\frac{\partial p}{\partial \rho} = 0 = \frac{10}{9}C\rho^{2/3} + 2t_0\rho + 6t_3\rho^2$ sont $\rho_s = 0, 1 \text{ fm}^{-3}$ et $\rho'_s = 1, 2 \cdot 10^{-3} \text{ fm}^{-3}$. On remarque que $\rho_s < \rho_0 = 0, 153 \text{ fm}^{-3}$.

III .3. – L'équation d'état à température non nulle

III .3.a. – L'équation du gaz parfait, en fonction de son nombre de particules N , est $p_{\text{GP}}V = Nk_{\text{B}}T$. La densité particulaire est $\rho = N/V$, donc $p_{\text{GP}} = \rho k_{\text{B}}T$.

La pression nucléaire devient, sous ces conditions, $p = \rho k_{\text{B}}T + t_0\rho^2 + 2t_3\rho^3$.

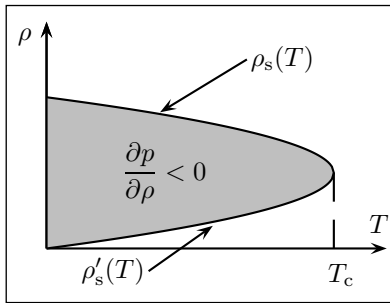
III .3.b. – On a $\frac{\partial p}{\partial \rho} = k_{\text{B}}T + 2t_0\rho + 6t_3\rho^2$. C'est un binôme en ρ qui possède des racines si $\Delta' = t_0^2 - 6t_3k_{\text{B}}T > 0$, soit

$$T < T_c = \frac{t_0^2}{6t_3k_{\text{B}}}.$$

On peut alors écrire $\Delta' = t_0^2(1 - T/T_c)$, ce qui donne, pour les racines,

$$\rho'_s(T) = \frac{|t_0|}{6t_3} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \right) \quad \text{et} \quad \rho_s(T) = \frac{|t_0|}{6t_3} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \right).$$

III .3.c. – Numériquement $k_{\text{B}}T_c = 26, 4 \text{ MeV}$. Pour $T = T_c$ les deux racines sont confondues et valent $\rho_s(T_c) = \frac{|t_0|}{6t_3} = 6, 7 \cdot 10^{-2} \text{ fm}^{-3}$.



III .3.d. – La zone où $\partial p/\partial \rho < 0$ est représentée ci-contre. Cette zone n'existe que pour $T < T_c$ et elle est bornée supérieurement (resp. inférieurement) par la courbe $\rho_s(T)$ (resp. $\rho'_s(T)$).

Pour $T > T_c$ la zone n'existe plus et le noyau se comporte comme un fluide usuel.

III .4. – Équation d'état et fragmentation.

III .4.a. – C'est une équation de propagation (équation de d'Alembert).

On peut écrire $\chi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T=0}$, d'où, avec $\lambda = m\rho_0$,

$$c_s^2 = \frac{\rho}{m\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{T=0}.$$

III .4.b. – D'après III .1.c., $c_s^2 = \frac{K\rho^2}{9m\rho_0^3}(3\rho - 2\rho_0)$, donc, pour $\rho = \rho_0$,

$$c_s^2 = \frac{K}{9m}.$$

A.N. : $c_s = 5 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1} = \frac{c}{6}$.

III .4.c. – Au début de la fusion, l'énergie cinétique interne, $E_{\text{c,int}}$ sert à faire croître ρ jusqu'à ρ_{max} . À ce point de l'évolution, le mouvement s'inverse et ρ décroît. Si $\rho_{\text{min}} > \rho_s$, on a vu que le système était stable et que la densité oscillait autour de ρ_0 .

Si cependant la densité passait en dessous de ρ_s , toute inhomogénéité de pression prenant naissance au sein du noyau conduirait à une fission.

En effet, dans ce cas, toutes les composantes sphériques de la décomposition d'une perturbation en pression s'écrivent $\frac{A}{r}e^{i(kr \pm \omega t)}$, où $\omega = c_s k$. Si $\rho < \rho_s$, la pulsation devient complexe et ce terme devient $\frac{A}{r}e^{ikr}e^{\pm |c_s|kt}$. Il apparaît donc une possibilité de divergence de la pression, qui conduit à la fission du noyau.