

X Physique 1 MP — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Yannick Alméras (ENS Ulm) ; il a été relu par Péter Horvai (ENS Ulm) et Jean-David Picon (École Polytechnique).

Le sujet porte sur l'étude d'un propulseur utilisant les forces magnétiques pour accélérer rapidement des projectiles vers de grandes vitesses.

Tout d'abord, dans la première partie du problème, on étudie le principe sous-jacent de la propulsion électromagnétique par auto-induction. Ensuite, dans la seconde partie, on tient compte du plasma qui se forme au niveau du projectile à cause de la forte intensité du courant utilisé. Enfin, dans la troisième partie, on étudie la dynamique de la propulsion à partir d'un modèle électromécanique simple.

Ce problème, d'une difficulté raisonnable et peu calculatoire, permet de tester ses connaissances sur le phénomène d'auto-induction. Il utilise des notions des cours de magnétisme et de mécanique.

Indications

Première partie

- I.B.1 Penser à la force de Laplace.
- I.B.2 Appliquer la relation $\mathcal{P} = I \frac{d\Phi_p}{dt}$ en prenant garde à la déformabilité du circuit.
- I.C.1.b Il faut commencer par étudier les propriétés d'invariance de la distribution du courant puis, utiliser à profit le théorème d'Ampère.
- I.D Utiliser le théorème de l'énergie cinétique.

Deuxième partie

- II.A.1 Exprimer la force de Laplace qui agit sur la tranche et en vérifier le sens.
- II.A.4.a Intégrer la relation obtenue à la question II.A.3.
- II.A.4.b Appliquer le théorème de la résultante cinétique au projectile seul.
- II.B.1 Penser à la quatrième équation de Maxwell.
- II.B.2 Utiliser le résultat obtenu à la question II.A.4.b.
- II.C Les applications numériques font intervenir notamment R_p , σ_p , M_p et M_{Cu} . La pression $P(l)$ se calcule à l'aide du résultat de la question II.B.2 ou de la question I.B.4. Attention, il ne faut pas oublier les électrons !

Troisième partie

- III.A.2.a Ne pas oublier que l'inductance L est variable.
- III.A.2.c Il y a *trois* conditions initiales.
- III.B.1 Il est possible d'évaluer un temps caractéristique τ de décroissance de l'intensité dans le circuit.
- III.B.3 Il faut discuter ici l'approximation $I(t) \simeq I_0$.
- III.C.2 Intégrer et combiner les équations (\mathcal{E}) et (\mathcal{M}) respectivement multipliées par I et \dot{x} au préalable.

Première partie Principe et ordres de grandeur

I.A.1 Le flux magnétique $\Phi(t)$ propre à travers un circuit d'inductance L , et parcouru par une intensité $I(t)$, est donné par la relation

$$\Phi(t) = L I(t)$$

La loi de Faraday permet alors d'exprimer la force électromotrice d'auto-induction

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{dLI(t)}{dt}$$

Or, le circuit électrique est *rigide*. Par conséquent, l'inductance est constante dans le temps et on obtient finalement

$$e(t) = -L \frac{dI(t)}{dt}$$

I.A.2 L'inductance du circuit électrique s'oppose à l'établissement du courant $I(t)$ (loi de Lenz) et le générateur (de tension E) doit fournir, en plus de l'énergie dissipée par effet Joule, une énergie supplémentaire $E_m(t)$. On calcule son expression en partant de l'égalité

$$E = RI + L \frac{dI}{dt}$$

En multipliant cette égalité par l'intensité I et en intégrant par rapport au temps entre 0 et t , on trouve

$$\int_0^t EI(t') dt' = \int_0^t RI^2(t') dt' + \int_0^t LI(t') \frac{dI(t')}{dt'} dt'$$

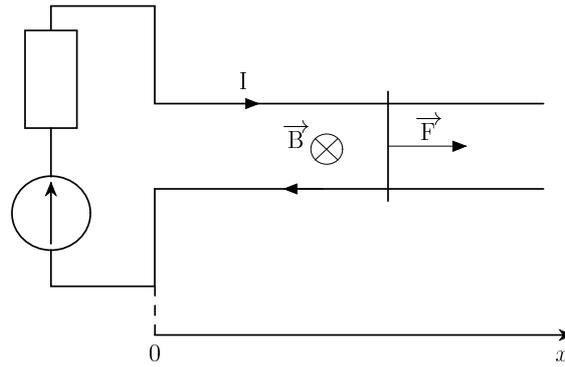
d'où

$$\underbrace{\int_0^t EI(t') dt'}_{\substack{\text{énergie fournie} \\ \text{par le générateur}}} = \underbrace{\int_0^t RI^2(t') dt'}_{\substack{\text{énergie dissipée} \\ \text{par effet Joule}}} + \underbrace{\int_0^{I(t)} LI dI}_{\text{énergie magnétique}}$$

soit

$$E_m(t) = \frac{1}{2} LI(t)^2$$

I.B.1 Lorsqu'un courant électrique I parcourt le circuit, celui-ci engendre un champ magnétique \vec{B} et le barreau est alors soumis à une force de Laplace \vec{F} qui le met en mouvement. Pour un sens du courant donné, le champ magnétique est orienté par la règle du tire-bouchon (ou par la règle de la main droite) et on voit que la force \vec{F} est toujours orientée dans le sens des x croissants (*cf* figure suivante).



On peut aussi raisonner, de façon plus empirique, à partir de la loi de Lenz. Cette loi permet de dire qu'une force électromotrice négative apparaît contre l'établissement du courant I . Cela signifie, d'après la loi de Faraday, que le flux du champ magnétique \vec{B} induit doit augmenter. La seule manière d'augmenter ce flux est alors d'augmenter la surface couverte par le circuit. Par conséquent, le barreau se met bien en mouvement dans le sens des x croissants.

I.B.2 La puissance fournie à l'instant t par le générateur en sus de celle dissipée par effet Joule est, en notant Φ_p le flux propre,

$$\mathcal{P} = I \frac{d\Phi_p}{dt}$$

L'expression du flux propre reste la même qu'à la question I.A.1. Cependant, le circuit n'étant plus rigide à cause du mouvement possible du barreau, son inductance n'est plus constante et la puissance \mathcal{P} s'exprime sous la forme

$$\mathcal{P} = LI \frac{dI}{dt} + I^2 \frac{dL}{dt}$$

I.B.3 La puissance \mathcal{P} calculée précédemment correspond, d'une part, à la variation de l'énergie magnétique E_m et, d'autre part, à la puissance $\mathcal{P}_{\text{méca}}$ de la force de Laplace qui provoque le déplacement du barreau sur les rails, ce qui s'écrit formellement

$$\mathcal{P} = \frac{dE_m}{dt} + \mathcal{P}_{\text{méca}}$$

En utilisant les expressions de l'énergie magnétique E_m et de la puissance \mathcal{P} vues aux questions I.A.2 et I.B.2, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{méca}} &= \mathcal{P} - \frac{dE_m}{dt} \\ &= LI \frac{dI}{dt} + I^2 \frac{dL}{dt} - \frac{1}{2} \frac{dLI^2}{dt} \\ \mathcal{P}_{\text{méca}} &= \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dt} \end{aligned}$$

En décomposant la dérivation temporelle, on obtient finalement

$$\mathcal{P}_{\text{méca}} = \frac{1}{2} I(t)^2 \frac{dL}{dx} \dot{x}$$

I.B.4 L'expression de la puissance mécanique est de la forme $\mathcal{P}_{\text{méca}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, ce qui permet de déduire que la force de Laplace qui s'exerce sur le barreau s'écrit

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}$$

Il est à noter la présence du facteur $\frac{1}{2}$ dans l'expression de la force est due au fait que c'est un champ magnétique *auto-induit* qui provoque le mouvement du barreau.

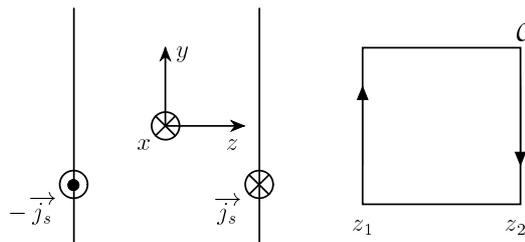
I.C.1.a Par *tout point de l'espace* passe un plan, parallèle à xOz , par rapport auquel la distribution de courant est symétrique. On en déduit que le champ magnétique créé est orthogonal à ces plans de symétrie en tout point, soit

$$\vec{B} = B(x, y, z) \vec{e}_y$$

I.C.1.b Tout d'abord, il est nécessaire de remarquer que la distribution de courant est invariante par toute translation parallèle au plan xOy , ce qui permet de dire que le champ magnétique ne dépend que de z :

$$\vec{B} = B(z) \vec{e}_y$$

Ensuite, on applique le théorème d'Ampère pour montrer que le champ magnétique est uniforme dans chaque région délimitée par les plaques. Considérons le contour \mathcal{C} orienté représenté sur la figure suivante.

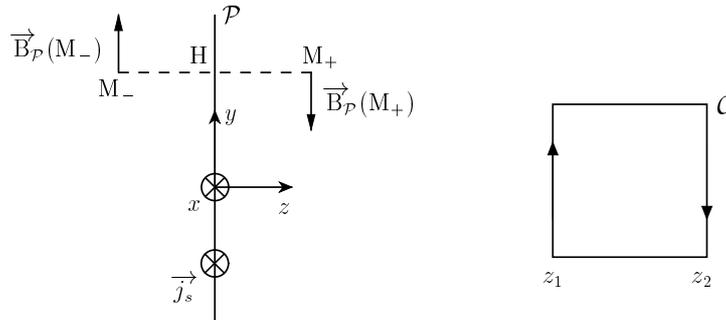


Si on note I_e le courant enlacé et orienté par le contour \mathcal{C} , le théorème d'Ampère s'exprime sous la forme

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e$$

En l'occurrence, on en déduit que $B(z_1)l - B(z_2)l = 0$ puisque le courant enlacé est nul et ce, pour n'importe quelles valeurs de z_1 et z_2 construisant un contour \mathcal{C} contenu dans l'une des régions délimitées par les plaques. Par conséquent, le champ magnétique est uniforme dans chacune de ces régions.

Enfin, pour calculer le champ magnétique dans chaque région, trouvons d'abord son expression pour un seul plan \mathcal{P} , parcouru par le courant $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_x$ (voir figure suivante).



En utilisant les mêmes propriétés de symétrie et d'invariance des distributions des densités de courant, on peut écrire que $\vec{B}_{\mathcal{P}} = B_{\mathcal{P}}(z) \vec{e}_y$. En appliquant le théorème d'Ampère avec le contour \mathcal{C} comme précédemment, on en déduit que le champ magnétique est constant dans chaque région délimitée par le plan \mathcal{P} . Prenons alors un point M_+ quelconque, hors de \mathcal{P} , et son symétrique M_- par rapport à \mathcal{P} . La relation de passage sur la composante tangentielle du champ magnétique impose

$$B_{\mathcal{P}}(M_+) - B_{\mathcal{P}}(M_-) = -\mu_0 j_s$$

Or, le problème est invariant par rotation d'angle π autour du point H (milieu de $[M_- M_+]$). Comme la relation précédente empêche $B_{\mathcal{P}}(M_+)$ et $B_{\mathcal{P}}(M_-)$ d'être simultanément nuls en présence de la distribution de courant \vec{j}_s , on a alors nécessairement

$$B_{\mathcal{P}}(M_+) = -B_{\mathcal{P}}(M_-)$$

Les deux dernières relations permettent de conclure que

$$B_{\mathcal{P}}(M_+) = -B_{\mathcal{P}}(M_-) = -\frac{1}{2} \mu_0 j_s$$

En appliquant le théorème de superposition, on en déduit alors aisément pour le cas des rails que

$$\boxed{\vec{B} \left(|z| < \frac{w}{2} \right) = \mu_0 j_s \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} \left(|z| > \frac{w}{2} \right) = \vec{0}}$$

On pouvait se douter que le champ magnétique est nul pour $|z| \rightarrow \infty$ puisqu'alors on ne voit que la superposition *nulle* de distributions de densités de courant opposées.

I.C.2.a L'expression du module de la densité surfacique de courant est

$$j_s = \frac{I}{h}$$

On suppose maintenant que l'expression du champ magnétique obtenue à la question I.C.1.b reste valable, ce qui signifie que l'on néglige les effets de bord, approximation correcte si $h \gg w$.

Les valeurs numériques données dans l'énoncé montrent que la légitimité de cette approximation est justifiée si l'on se contente d'une évaluation à l'ordre le plus bas en $\frac{w}{h}$ de l'inductance linéique L' .

Le flux magnétique par unité de longueur selon Ox , Φ' , se calcule par conséquent de la façon suivante :

$$\Phi' = B w = \mu_0 j_s w = \mu_0 I \frac{w}{h}$$

Par l'intermédiaire de la relation $\Phi' = L' I$, on en déduit l'expression de l'inductance linéique

$$L' = \mu_0 \frac{w}{h}$$

I.C.2.b On obtient numériquement $L' = 0,4 \mu\text{H.m}^{-1}$.

Cette valeur est donnée dans l'énoncé dans l'introduction de la troisième partie ! Comme quoi il est fort utile de lire le sujet jusqu'au bout au cours d'une épreuve...

I.D Afin de déterminer l'intensité demandée, on applique le théorème de l'énergie cinétique au projectile en négligeant les frottements dans son mouvement sur les rails. La variation d'énergie cinétique entre l'instant initial (vitesse nulle) et l'instant où il atteint la vitesse $v = 6 \text{ km/s}$ (à l'abscisse X) correspond au travail de la force F calculée à la question I.B.4 et que l'on supposera constante. Ainsi, on a

$$\frac{1}{2} m v^2 = F X$$

En introduisant l'expression de la force F , on obtient finalement l'expression de l'intensité I nécessaire :

$$I = \sqrt{\frac{mv^2}{XL'}}$$

On trouve ainsi

$$I = 297 \text{ kA}$$

Encore une fois, l'énoncé donne en première page $I_0 = 300 \text{ kA}$ pour valeur de l'intensité initiale, ce qui permet de vérifier la cohérence du résultat de l'application numérique.

Deuxième partie Accélération d'un projectile par un plasma

II.A.1 La tranche de plasma est soumise à la force de Laplace

$$\vec{dF}_L = \vec{J}(x_p) \wedge \vec{B}(x_p) w h dx_p = -w h J(x_p) B(x_p) dx_p \vec{e}_x$$

On peut remarquer que $J(x_p)$ et $B(x_p)$ sont nécessairement de signes opposés d'après la règle du tire-bouchon. Par conséquent, la force \vec{dF}_L est orientée dans le sens du vecteur \vec{e}_x .

II.A.2 La résultante des forces de pression sur la tranche est

$$\vec{dF}_P = P(x_p) w h \vec{e}_x - P(x_p + dx_p) w h \vec{e}_x$$

ce qui se simplifie sous la forme

$$\vec{dF}_P = -\frac{dP}{dx_p} w h dx_p \vec{e}_x$$

II.A.3 On applique le théorème de la résultante cinétique à la tranche dans le référentiel galiléen du propulseur, en projection sur l'axe Ox . Les seules forces, appliquées à cette tranche, ayant une composante non nulle suivant cet axe Ox sont les forces de Laplace et de pression calculées aux questions II.A.1 et II.A.2. Comme la masse $\rho(x_p) w h dx_p$ de la tranche est constante, on a

$$\rho(x_p) w h dx_p a = dF_{L,x} + dF_{P,x}$$

En introduisant les expressions des forces, on obtient finalement l'équation simplifiée

$$\rho(x_p) a = -J(x_p) B(x_p) - \frac{dP}{dx_p}$$

II.A.4.a La question précédente donne accès à une expression du gradient de pression

$$\frac{dP}{dx_p} = -\rho(x_p) a - J(x_p) B(x_p)$$

En intégrant cette relation entre $x_p = 0$ et $x_p = l$, on en déduit sous forme intégrale la pression à l'extrémité du plasma, étant entendu que l'accélération est la même en tout point de la tranche de masse M_p ,

$$P(x_p = l) = P_0 - \frac{M_p}{w h} a - \int_0^l J(x_p) B(x_p) dx_p$$

II.A.4.b On applique le théorème de la résultante cinétique au projectile de masse M_0 , dans le référentiel galiléen du propulseur, en projection sur l'axe Ox . Seules les forces de pression interviennent, d'où

$$M_0 a = P(x_p = l) S - P_0 S$$

Avec cette dernière équation et l'expression obtenue à la question précédente, on peut éliminer les termes de pression et on obtient finalement

$$(M_p + M_0) a = -S \int_0^l J(x_p) B(x_p) dx_p$$

| Ce résultat est en accord avec celui de la question II.A.1.

II.B.1 La quatrième équation de Maxwell, dans l'approximation des régimes quasi-permanents, ne fait intervenir que le terme de courant de conduction $\mu_0 \vec{J}$ car le terme de courant de déplacement $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est nul, d'où

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

On en déduit que

$$\mu_0 J(x_p) = \frac{dB(x_p)}{dx}$$

| On peut remarquer ici que le courant de déplacement est négligeable aussi parce que le mouvement du projectile n'est pas relativiste.

II.B.2 D'après le résultat de la question II.A.4.b, le système plasma-projectile est soumis à une force de module F_{p-p} dont l'expression est :

$$F_{p-p} = -S \int_0^l J(x_p) B(x_p) dx_p$$

En utilisant le résultat de la question précédente, il est alors possible de calculer cette force. En effet,

$$\begin{aligned} F_{p-p} &= -\frac{S}{\mu_0} \int_0^l \frac{dB(x_p)}{dx_p} B(x_p) dx_p \\ &= -\frac{S}{\mu_0} \int_{B(0)}^{B(l)} B dB \\ F_{p-p} &= -\frac{S}{2\mu_0} (B(l)^2 - B(0)^2) \end{aligned}$$

Or, l'énoncé nous suggère de prendre le champ magnétique nul au niveau du projectile *ie* $B(l) = 0$, ce qui permet d'obtenir finalement

$$F_{p-p} = \frac{S}{2\mu_0} B(0)^2$$

II.B.3 La question I.B.4 a permis d'écrire une expression de la force de propulsion

$$F = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}$$

On peut alors développer le calcul de cette force en utilisant l'expression de l'inductance linéique $L' = \mu_0 \frac{w}{h}$ obtenue à la question I.C.2.a, ainsi que l'expression $B = \frac{\mu_0 I}{h}$, d'où

$$F = \frac{1}{2} I B w = \frac{1}{2} h w \frac{B^2}{\mu_0}$$

Par conséquent, on obtient une expression analogue à celle de la question précédente :

$$F = \frac{S}{2\mu_0} B^2$$

II.C Tout d'abord, on peut calculer l à partir des valeurs de la résistance et de la conductivité du plasma données au début de l'énoncé. Puisque $R_p = \frac{1}{\sigma_p} \frac{w}{hl}$, on en déduit que

$$l = \frac{w}{\sigma_p R_p h}$$

L'expression de la masse volumique moyenne $\bar{\rho}$ du plasma s'obtient ensuite à l'aide de la relation

$$\bar{\rho} = \frac{M_p}{l h w}$$

Enfin, le nombre moyen \bar{n} de particules (ions *et électrons*) par unité de volume s'obtient, puisque il y a autant d'électrons que d'ions, avec

$$\bar{n} = 2 \frac{N_A \bar{\rho}}{M_{Cu}}$$

Les applications numériques donnent finalement

$$l = 0,059 \text{ m} \quad \bar{\rho} = 3,25 \text{ kg.m}^{-3} \quad \bar{n} = 6,2.10^{25} \text{ m}^{-3}$$

Pour estimer la température $T(l)$ au voisinage du projectile, on suppose que le plasma obéit à l'équation d'état des gaz parfaits $PV = n_{\text{mol}} RT$, ce qui permet d'écrire ici

$$T(l) = \frac{N_A P(l)}{\bar{n} R}$$

Or, la pression $P(l)$ du plasma correspond au rapport de la force de poussée avec la surface S . On peut procéder de deux façons équivalentes :

- **Première méthode** : on utilise l'expression de la force obtenue à la question I.B.4, d'où

$$P(l) = \frac{1}{2} \frac{I_0^2 L'}{w h}$$

- **Deuxième méthode** : on utilise l'expression de la force obtenue à la question II.B.2 et l'expression du champ magnétique $B = \frac{\mu_0 I_0}{h}$, ce qui conduit à

$$P(l) = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I_0^2}{2h^2}$$

Compte tenu du résultat de la question I.C.2.a, ces deux méthodes donnent des expressions identiques de la pression.

A.N. $P(l) = 35 \text{ MPa}$

La température au voisinage du projectile s'obtient finalement par la relation

$$T(l) = \frac{l w h M_{Cu}}{2 M_p R} P(l)$$

A.N. $T(l) = 41000 \text{ K}$

Cette valeur de température très élevée est cohérente, en ordre de grandeur, avec les mesures expérimentales et des calculs théoriques plus sophistiqués. Une telle température est en pratique en partie à l'origine de l'usure rapide des rails.

Troisième partie Modèle électromécanique du propulseur

III.A.1.a L'inductance L_0 est appelée impédance de stockage car elle permet d'emmagasiner de l'énergie pendant la phase de charge où l'interrupteur C est fermé.

Il est bon d'évaluer tout de suite la quantité d'énergie $E_0 = \frac{1}{2} L_0 I_0^2$ stockée. Il s'agit d'une importante quantité d'énergie puisqu'elle vaut $E_0 = 990 \text{ kJ}$!

III.A.1.b Une inductance de stockage est utilisée ici dans la mesure où une très importante quantité d'énergie doit être stockée au départ et délivrée ensuite en peu de temps. Une capacité, *en lieu et place de l'inductance*, ne convient pas si l'on tient à contrôler, en plus, l'intensité I_0 à $t = 0$ car elle n'assure pas la *continuité du courant* dans sa branche.

Il suffit d'utiliser, pour charger l'inductance L_0 , un générateur homopolaire important. Historiquement, c'est de cette manière que le premier propulseur électromagnétique permettant d'accélérer des projectiles de 3 g jusqu'à des vitesses de 6 km.s^{-1} a été réalisé au début des années 1970 en Australie.

Une autre méthode consiste à utiliser des bancs de condensateurs pour stocker l'énergie, *la géométrie du circuit étant différente*. Ce procédé a attendu longtemps avant de pouvoir être mis au point (problème des tensions de claquage des condensateurs).

III.A.1.c Le rôle de la diode est de permettre d'éviter de court-circuiter, par le projectile entre les rails, la charge de l'inductance lorsque l'interrupteur C est fermé : cette diode se comporte alors comme un interrupteur ouvert. Ensuite, quand C est ouvert, elle est équivalente à un interrupteur fermé et l'énergie emmagasinée dans l'inductance est délivrée au circuit déformable.

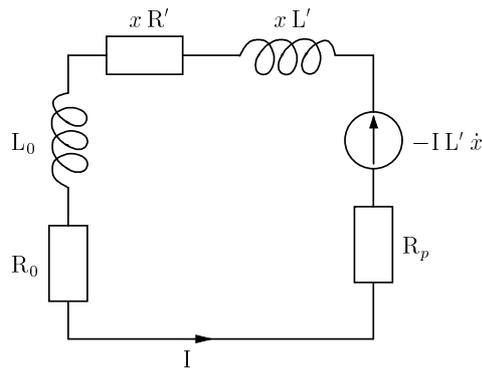
III.A.2.a Afin d'exprimer la force électromotrice e , on utilise la loi de Faraday en prenant garde au fait que l'inductance $L = L_0 + xL'$ est variable :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dLI}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$$

On en déduit que

$$e = -(L_0 + xL')\frac{dI}{dt} - IL'\dot{x}$$

Par conséquent, le circuit équivalent est représenté sur la figure suivante, le sens du courant étant imposé par la diode.



On trouve alors l'équation électrique (\mathcal{E}) du circuit :

$$(L_0 + xL')\frac{dI}{dt} + (R_p + R_0 + xR' + \dot{x}L')I = 0 \quad (\mathcal{E})$$

III.A.2.b Pour obtenir l'équation mécanique demandée, on applique le principe fondamental de la dynamique au système plasma-projectile, dans le référentiel galiléen du laboratoire, en projection suivant l'axe Ox . La seule force qui intervient est la force de propulsion de Laplace calculée à la question I.B.4, d'où l'équation mécanique (\mathcal{M})

$$M\ddot{x} = \frac{1}{2}I^2L' \quad (\mathcal{M})$$

III.A.2.c En ce qui concerne l'intensité, la condition initiale s'écrit $I(0) = I_0$. Pour la position du barreau, on a les conditions $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Attention, la position $x(t)$ du barreau obéit à une équation différentielle d'ordre 2 (l'équation mécanique (\mathcal{M})) et demande que l'on écrive bien deux conditions initiales indépendantes, et non une seule !

Les équations (\mathcal{E}) et (\mathcal{M}) n'admettent pas de solution stationnaire avec ces conditions initiales.

III.B.1 Intuitivement, plus l'inductance de stockage est grande, plus il y a d'énergie disponible initialement pour la propulsion du projectile, et plus il faut de temps pour la dissiper. Ainsi, si L_0 est suffisamment importante, l'intensité dans le circuit va peu diminuer et on pourra écrire que $I(t) \simeq I_0$.

Il est fort judicieux d'évaluer ici le temps caractéristique τ de décroissance de l'intensité au cours du temps afin de quantifier le domaine de validité de l'approximation $I(t) \simeq I_0$:

$$\tau = \frac{L_0 + xL'}{R_p + R_0 + xR' + \dot{x}L'} \simeq \frac{L_0}{R_p + R_0 + xR'}$$

Après application numérique, on en déduit que l'intensité peut être considérée comme constante pour des durées de propulsion du projectile très inférieures à $\tau = 7$ ms.

III.B.2 Puisque l'intensité et l'inductance linéique sont des constantes, l'équation mécanique (\mathcal{M}) s'intègre immédiatement, compte tenu des conditions initiales vues à la question III.A.2.c, en

$$\dot{x}(t) = a_0 t \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

On constate que la constante a_0 représente l'accélération du projectile. Numériquement, on a $a_0 = 6.10^6 \text{ m.s}^{-2}$, ce qui est considérable et montre l'efficacité du dispositif de propulsion électromagnétique.

III.B.3 D'après la question précédente, les expressions de la durée τ_0 et de la vitesse $\dot{x}(\tau_0)$ d'éjection sont respectivement

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2X}{a_0}} \quad \text{et} \quad \dot{x}(\tau_0) = \sqrt{2a_0X}$$

Numériquement, on obtient ainsi

$$\tau_0 = 1 \text{ ms} \quad \text{et} \quad \dot{x}(\tau_0) = 6 \text{ km.s}^{-1}$$

D'une part, on vérifie ici que l'approximation $I(t) \simeq I_0$ proposée à la question III.B.1 est relativement raisonnable puisque $\tau_0 = \frac{\tau}{7}$.

D'autre part, la valeur numérique obtenue pour la vitesse est cohérente avec celle donnée dans l'énoncé à la question I.D.

III.C.1 L'énergie $\Delta E(t)$ délivrée depuis l'instant $t = 0$ par l'inductance L_0 au reste du circuit et au projectile correspond à la variation de l'énergie magnétique stockée dans celle-ci :

$$\Delta E(t) = \frac{1}{2} L_0 [I_0^2 - I(t)^2]$$

III.C.2 On veut obtenir, dans cette question, l'équation énergétique du dispositif à partir des équations électrique (\mathcal{E}) et mécanique (\mathcal{M}) obtenues aux questions III.A.2.a et III.A.2.b. Pour cela, on commence par multiplier (\mathcal{E}) par l'intensité I et on en prend l'intégrale entre 0 et t :

$$\int_{I_0}^{I(t)} L_0 I \, dI + \int_0^t x(t') L' I(t') \, dI(t') + \int_0^t [R_0 + R_p + x(t') R'] I^2(t') \, dt' + \int_0^t L' I^2(t') \dot{x}(t') \, dt' = 0$$

Ainsi, la première intégrale faisant apparaître $-\Delta E(t)$ (*cf* question III.C.1), on a

$$\Delta E(t) = \int_0^t x(t') L' I(t') \, dI(t') + \int_0^t [R_0 + R_p + x(t') R'] I^2(t') \, dt' + \int_0^t L' I^2(t') \dot{x}(t') \, dt'$$

Par ailleurs, multiplions l'équation mécanique (\mathcal{M}) par la vitesse \dot{x} et intégrons de 0 à t . On trouve, en tenant compte des conditions initiales (*cf* question III.A.2.c),

$$\frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} \int_0^t L' I^2(t') \dot{x}(t') \, dt'$$

Par conséquent, on peut faire apparaître le terme $\frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2$ dans $\Delta E(t)$:

$$\Delta E(t) = \frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2 + \left[\int_0^t x(t') L' I(t') \, dI(t') + \frac{1}{2} \int_0^t L' I^2(t') \dot{x}(t') \, dt' \right] + \int_0^t [R_0 + R_p + x(t') R'] I^2(t') \, dt'$$

Les deux intégrales entre crochets se calculent, compte tenu des conditions initiales (*cf* question III.A.2.c), en les regroupant en une seule intégrale où l'on reconnaît la dérivée temporelle de $L' x I^2$, d'où, finalement :

$$\Delta E(t) = \frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} L' x(t) I(t)^2 + \int_0^t dt' [R_0 + R_p + R' x(t')] I(t')^2$$

L'interprétation de chacun des termes de cette équation bilan des échanges énergétiques est la suivante :

- $\Delta E(t)$ est l'énergie fournie au circuit et au projectile par l'inductance de stockage ;

- $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2$ est la part d'énergie reçue convertie en énergie cinétique de mouvement du projectile ;
- $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L' x(t) I(t)^2$ est la part d'énergie reçue stockée par auto-induction dans les rails ;
- $\mathcal{E}_J = \int_0^t dt' [R_0 + R_p + R' x(t')] I(t')^2$ est l'énergie dissipée par effet Joule dans l'ensemble du dispositif.

III.C.3 On se place dans le cadre de l'approximation utilisée à la question III.B.1 (ie $I(t) \simeq I_0$) et on peut ainsi utiliser les résultats de la question III.B.2. On a alors

- l'énergie cinétique de mouvement du projectile

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} M (a_0 t)^2$$

- l'énergie stockée par auto-induction dans les rails

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L' x(t) I(t)^2 = \frac{1}{2} L' \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 \right) I_0^2 = \frac{1}{2} \frac{L' I_0^2}{2} a_0 t^2 = \frac{1}{2} M (a_0 t)^2$$

- l'énergie dissipée par effet joule

$$\mathcal{E}_J = \int_0^t dt' \left[R_0 + R_p + \frac{1}{2} R' a_0 t'^2 \right] I_0^2 = (R_0 + R_p) I_0^2 t + \frac{1}{6} R' a_0 I_0^2 t^3$$

Bilan :
$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_L = \frac{1}{2} M a_0^2 t^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_J = (R_0 + R_p) I_0^2 t + \frac{1}{6} R' a_0 I_0^2 t^3$$

Finalement,
$$\Delta E(t) = M a_0^2 t^2 + (R_0 + R_p) I_0^2 t + \frac{1}{6} R' a_0 I_0^2 t^3$$

III.C.4.a Les valeurs numériques de chacun des termes à l'instant τ_0 sont

$$\mathcal{E}_c(\tau_0) = \mathcal{E}_L(\tau_0) = 54 \text{ kJ} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_J(\tau_0) = 136 \text{ kJ}$$

III.C.4.b D'après les questions III.C.1 et III.C.2, on peut écrire l'intensité $I(\tau_0)$ sous la forme

$$I(\tau_0) = \sqrt{I_0^2 - 2 \frac{\mathcal{E}_c(\tau_0) + \mathcal{E}_L(\tau_0) + \mathcal{E}_J(\tau_0)}{L_0}}$$

On en déduit la valeur numérique

$$I(\tau_0) = 260 \text{ kA}$$

On constate qu'au moment où le projectile quitte les rails, l'intensité a diminué de 13 %. L'approximation $I(t) \simeq I_0$ utilisée dans les questions III.B est donc relativement raisonnable, comme on avait déjà pu le noter à la question III.B.3.

III.C.4.c Le rendement électromagnétique est $\eta = \frac{\mathcal{E}_c(\tau_0)}{E_0}$ avec $E_0 = \frac{1}{2} L_0 I_0^2$ déjà évaluée à la question III.A.1.a. Ainsi,

$$\eta = 5,5 \%$$

III.D.1 La définition de la fonction $y(t)$ permet d'écrire que $I(t) = I_0 e^{-y(t)}$. Alors, puisque $\dot{I}(t) = -I(t) \dot{y}(t)$, on peut transformer les équations électrique (\mathcal{E}) et mécanique (\mathcal{M}) sous la forme

$$\begin{aligned} (L_0 + xL') \dot{y} &= R_p + R_0 + xR' + \dot{x}L' \\ \ddot{x} &= a_0 e^{-2y(t)} \end{aligned}$$

III.D.2 Numériquement, $L_0 = 22 \mu\text{H}$ et $xL' = 1,2 \mu\text{H}$. On constate que l'on aura toujours, pendant la phase de propulsion, $L_0 \gg xL'$, ce qui permet de simplifier la première équation différentielle obtenue à la question D.1 sous la forme

$$L_0 \dot{y} = R_p + R_0 + xR' + \dot{x}L'$$

III.D.3 On suppose que $y(t) \ll 1$, ce qui signifie que l'intensité varie peu au cours du temps de propulsion. On peut alors reprendre les expressions de $\dot{x}(t)$ et de $x(t)$ obtenues à la question III.B.2. L'équation écrite à la question précédente devient

$$\dot{y}(t) = \frac{R_0 + R_p}{L_0} + a_0 \frac{L'}{L_0} t + a_0 \frac{R'}{L_0} \frac{t^2}{2}$$

En utilisant la condition initiale $y(0) = 0$, on en déduit par intégration l'expression de $y(t)$:

$$y(t) = \frac{R_0 + R_p}{L_0} t + a_0 \frac{L'}{L_0} \frac{t^2}{2} + a_0 \frac{R'}{L_0} \frac{t^3}{6}$$

III.D.4 L'énergie $\Delta E(t)$ délivrée depuis l'instant $t = 0$ au circuit et au projectile est

$$\Delta E(t) = \frac{1}{2} L_0 [I_0^2 - I(t)^2] = \frac{1}{2} L_0 I_0^2 [1 - e^{-2y(t)}]$$

Compte tenu de l'approximation $y(t) \ll 1$, on obtient finalement

$$\Delta E(t) \simeq L_0 I_0^2 y(t)$$

Il ne reste plus qu'à injecter dans cette relation l'expression de $y(t)$ obtenue à la question précédente, ce qui permet de trouver le résultat de la question III.C.3, compte tenu de $L' I_0^2 = 2 M a_0$,

$$\Delta E(t) = M a_0^2 t^2 + (R_0 + R_p) I_0^2 t + \frac{1}{6} R' a_0 I_0^2 t^3$$

Quelques remarques s'imposent pour terminer :

- Il est à noter que dans le problème, on n'a pas tenu compte de la dissipation d'énergie, notamment, par frottement du projectile contre les rails ou encore, par rayonnement thermique (le plasma étant à plusieurs dizaines de milliers de Kelvins!). De plus, on a négligé l'effet du champ magnétique auto-induit par le plasma.
- Des personnes auront entendu parler, dans les jeux ou les films de science fiction, d'armes de tir électromagnétiques. Peu d'entre elles se rendent compte que ces armes, supposées fantaisistes, sont réelles, même si elles ne se présentent pas exactement comme dans les bandes dessinées. Le dispositif étudié dans ce problème est appelé dans la littérature anglo-saxonne « railgun », parce que ce sont surtout les militaires qui sont intéressés par ses applications pour réaliser des armes et qui ont motivé les recherches dans ce domaine depuis les années 1960. Une arme classique tire des projectiles à environ 500 m.s^{-1} . Avec le dispositif présent, réalisé au début des années 1970 à Canberra (Australie) par S.C. Rashleigh et R.A. Marshall, on arrivait déjà à propulser un projectile de 3 g à 6000 m.s^{-1} ! Actuellement, l'Université du Texas possède un « railgun » de 10 m de long, qui peut tirer un projectile de 4 kg à 2000 m.s^{-1} ! Il s'agit là d'un canon redoutable qui présente l'avantage d'utiliser des munitions non explosives, donc plus simples à stocker.
- Il existe tout de même des applications plus pacifiques possibles pour les propulseurs électromagnétiques. Par exemple, dans le domaine spatial, le lancement de fusées utilisant un tel dispositif aurait un coût 65 % moins élevé que celui des fusées à explosion, la majeure partie de l'économie tenant au fait qu'on gaspille actuellement de l'énergie pour propulser des masses « mortes » (le moteur de la fusée, le carburant...). Il y a eu aussi une proposition d'utilisation pour projeter des minerais de la surface de la Lune pour les mettre en orbite lunaire !
- Même si le « railgun » à l'air d'être un dispositif simple à réaliser, ce n'est pas le cas. Il se présente de nombreux problèmes pratiques dont :
 - celui de l'alimentation en énergie (besoin de beaucoup d'énergie en très peu de temps) ;
 - celui de la quantité de chaleur produite lors d'un tir (1 million d'ampères, même dans un métal bon conducteur, cela provoque

- une forte élévation de température);
 - l'usure par les frottements sur les rails qui nécessite leur remplacement fréquent;
 - les problèmes dus à la force de répulsion conséquente qui s'exerce entre les deux rails parcourus par des courants opposés énormes.
- Pour plus de renseignements sur les « railguns », vous pouvez vous reporter, par exemple, aux articles suivant :
S.C. RASHLEIGH et R.A. MARSHALL, *Electromagnetic acceleration of macroparticles to high velocities*, J. Appl. Phys. 49 : 2540-2542.
J.D. POWELL et J.H. BATTEH, *Two-dimensional plasma model for the arc-driven railgun*, J. Appl. Phys. 54 : 2242-2254.