

ECOLE POLYTECHNIQUE
Première composition de physique MP 2003

Microscopie à force électrostatique.

I – Oscillateur mécanique

1a) On applique la relation fondamentale de la dynamique à la masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La masse m est soumise à son poids $-mg\vec{e}_z$ et à la force exercée par le ressort. Pour cette dernière, il faudra prêter attention à l'expression de la longueur du ressort (on appellera l_0 sa longueur à vide) et au sens du vecteur unitaire de l'axe de projection. La force exercée par le ressort est alors : $k(z_P - z_M - l_0)\vec{e}_z$. Or nous savons que $z_P = z_{P0} + a_0 \cos \omega t$ et $z_M = z_0 + \delta$.

De plus à l'équilibre, on a $k(z_{P0} - z_0 - l_0) = mg$. En prenant en compte, l'ensemble de ces éléments, la relation de la dynamique nous donne :

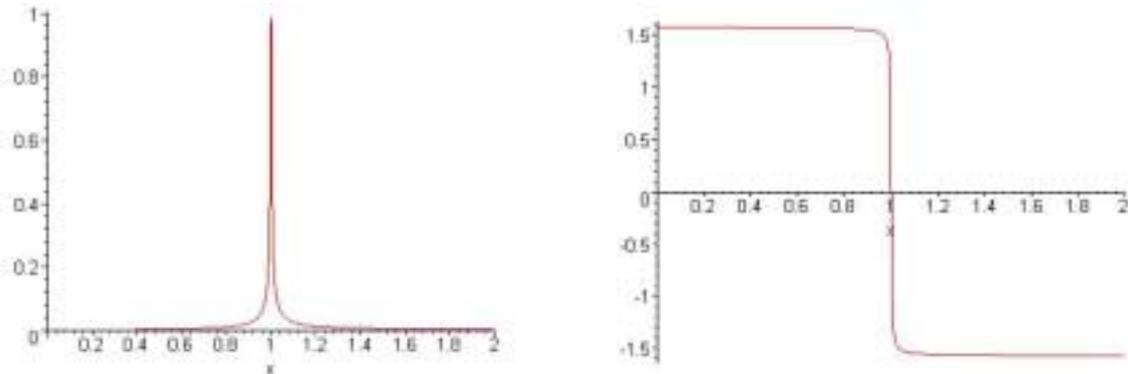
$$m \frac{d^2 \delta}{dt^2} + \beta \frac{d\delta}{dt} + k\delta = ka_0 \cos \omega t$$

1b) En régime sinusoïdal forcé, avec la notation complexe on aboutit à : $B \left(mj\omega + \beta + \frac{k}{j\omega} \right) = kA$. En

tenant compte des grandeurs définies par l'énoncé, on obtient la fonction de transfert classique du filtre passe-bande :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

1c) ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur et Q le facteur de qualité supposé très élevé, on prend pour Q la valeur indiquée dans la suite de l'énoncé (200). La résonance est donc très aiguë. L'allure du graphe est la suivante en posant $x = \omega/\omega_0$:



1d) L'argument de $H(\omega)$ est défini par son cosinus et son sinus. On obtient $\tan \varphi = -Q \left(x - \frac{1}{x} \right)$.

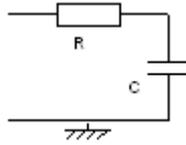
Voir ci-dessus. L'essentiel des variations de φ s'effectue autour de $x=1$. Le calcul de la dérivée

donne : $\frac{d \tan \varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{Q}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$. Or $\frac{d \tan \varphi}{d\varphi} = 1 + \tan^2 \varphi$; comme en $x=1$ $\tan \varphi = 0$, on peut

conclure par l'expression :

$$\left(\frac{d\varphi}{d\omega} \right)_{\omega_0} = -\frac{2Q}{\omega_0}$$

2a) En revenant aux notations réelles, on constate immédiatement que $\hat{\delta}$ évolue en $\cos(\omega t + \varphi)$ alors que $u_A(t) = u_0 \cos \omega t$. Le produit de ces deux cosinus génère la somme de deux termes, l'un en $\cos \varphi$ et l'autre en $\cos(2\omega t + \varphi)$. La composante continue dépend donc de $\cos \varphi$. Pour ne garder que la composante continue, on utilisera un filtre passe-bas du premier ordre de type RC vérifiant $\omega RC \gg 1$. Le schéma de ce montage est :



La tension continue récupérée est de la forme $U = U_0 \cos \varphi$. La sensibilité sera définie par $\frac{dU}{d\omega}$.

Ainsi $\frac{dU}{d\omega} = -U_0 \sin \varphi \frac{d\varphi}{d\omega}$, or autour de la pulsation propre $\sin \varphi \approx 0$. La sensibilité est donc nulle.

Ceci est cohérent avec l'observation de la forme de la fonction cosinus qui présente un « plat » autour de la valeur $\cos \varphi = 1$. Cette situation n'est pas satisfaisante pour optimiser la précision de la mesure de la pulsation propre.

2b) Nous savons que $\hat{\delta} = j\omega\delta$. Par conséquent, la position sera déphasée de $\pi/2$ par rapport à la vitesse. Les fonctions cosinus de la question précédente deviennent des fonctions sinus. Le problème soulevé ci-dessus est donc résolu puisque maintenant $\frac{dU}{d\omega} = U_0' \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\omega}$. Au contraire la sensibilité sera maximale. On peut espérer mesurer avec beaucoup de précision la pulsation propre de l'oscillateur, encore faut-il que le facteur de qualité soit élevé. Cela semble être le cas par la suite.

2c) A partir de $\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_{\omega_0} = -\frac{2Q}{\omega_0}$, on en déduit immédiatement que $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{\delta\varphi}{2Q}$.

2d) On trouve $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = 2.10^{-5}$ et par conséquent $\delta\omega_0 = 1,2 \text{ Hz}$ ou rad.s^{-1} .

3a) Un développement limité au premier ordre de la force supplémentaire s'écrit selon :

$$F_C(z_M) = F_C(z_0) + \delta \left(\frac{dF_C}{dz_M} \right)_{z_0}$$

L'énoncé nous invite à négliger l'influence de l'ordre 0 sur la position d'équilibre statique. L'équation différentielle est donc modifiée et devient :

$$m \frac{d^2\delta}{dt^2} + \beta \frac{d\delta}{dt} + k\delta = \delta \left(\frac{dF_C}{dz_M} \right)_{z_0} + ka_0 \cos \omega t$$

Tout se passe comme si l'équation différentielle était $m \frac{d^2\delta}{dt^2} + \beta \frac{d\delta}{dt} + (k + \delta k)\delta = ka_0 \cos \omega t$. Cela permet d'identifier la variation de constante de raideur à :

$$\delta k = - \left(\frac{dF_C}{dz_M} \right)_{z_0}$$

3b) La nouvelle pulsation propre est donc $\omega_0' = \sqrt{\frac{k + \delta k}{m}} = \omega_0 \left(1 + \frac{\delta k}{k} \right)^{1/2}$. Par développement

limité à l'ordre 1, on obtient $\omega_0' = \omega_0 \left(1 + \frac{\delta k}{2k} \right)$. La variation de pulsation apparente est donc :

$$\delta\omega_{ap} = \frac{\omega_0}{2} \frac{\delta k}{k}$$

3c) Nous avons vu avant que $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{\delta\varphi}{2Q}$. Cette quantité doit être inférieure à $\frac{\delta\omega_{ap}}{\omega_0}$, on obtient facilement la condition $\frac{\delta k}{k} > \frac{\delta\varphi}{Q}$. Un facteur de qualité élevé rend aiguë la résonance et logiquement permet de mieux déterminer la pulsation propre de l'oscillateur. Ainsi, la sensibilité à l'existence d'une force supplémentaire en sera d'autant meilleure.

II – Mesure de forces capacitives

1a) Il est inutile de s'étendre longuement sur la démonstration de ce résultat très classique du plan infini uniformément chargé en surface. Le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

1b) En considérant la somme des deux champs créés par deux plan infinis portant des distributions de charges opposées, on est amené à constater que, compte tenu du changement d'orientation des deux champs par rapport à leur plan respectif, le champ total est nul à l'extérieur du condensateur et uniforme à l'intérieur de valeur :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Le champ électrique créé par l'armature basse est donc la moitié du champ précédent :

$$\vec{E}_{\text{basse} \rightarrow \text{haute}} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z.$$

1c) L'armature haute porte la charge σS , elle subit donc la force $\vec{F}_{\text{capa}} = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$. Comme le champ électrique total est uniforme à l'intérieur du condensateur, il s'exprime très simplement en fonction de la différence de potentiel appliquée $\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{U}{l}$. La force demandée est donc bien :

$$\vec{F}_{\text{capa}} = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2l^2} \vec{e}_z$$

Cette force est dirigée vers le bas, elle traduit le caractère attractif de l'interaction entre les deux plaques du condensateur.

1d) Nous avons vu ci-dessus que $\delta k = -\left(\frac{dF_C}{dz_M}\right)_{z_0}$. Ici, cela correspond à $\delta k = -\left(\frac{dF_C}{dl}\right)_l$. On

obtient ainsi $\delta k = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{l^3}$. En s'aidant de $\delta\omega_{ap} = \frac{\omega_0}{2} \frac{\delta k}{k}$, il vient la variation de pulsation propre de l'oscillateur selon :

$$\delta\omega_{\text{capa}} = -\frac{\omega_0}{2k} \frac{\epsilon_0 S U^2}{l^3}$$

2a) La condition fournie sur les aires nous permet de continuer à utiliser le modèle du condensateur plan infini. On a dans ces conditions :

$$\delta\omega_{\text{capa}}(1) = -\frac{\omega_0}{2k} \frac{\epsilon_0 S U^2}{l^3} \quad \text{et} \quad \delta\omega_{\text{capa}}(2) = -\frac{\omega_0}{2k} \frac{\epsilon_0 S U^2}{(l-h)^3}$$

En conduisant le calcul avec un développement limité à l'ordre 1 en h/l , on trouve que :

$$\delta\omega_h = -\frac{3\omega_0}{2k} \frac{\epsilon_0 S U^2 h}{l^4}$$

2b) En valeur absolue, on trouve que $|\delta\omega_h / \omega_0| = \frac{3}{2k} \frac{\epsilon_0 S U^2 h}{l^4} \approx 5.10^{-5}$. Or dans la première partie,

nous avons montré que l'on pouvait accéder à $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = 2.10^{-5}$. On peut donc conclure que le relief

proposé est accessible même si la marge n'est pas grande.

2c) La force capacitive est donnée par :

$$F_{\text{capa}}(1) = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2l^2} \quad \text{et} \quad F_{\text{capa}}(2) = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2(l-h)^2}$$

On trouve donc que :

$$\delta F_{\text{capa}} = -\frac{\epsilon_0 S U^2 h}{l^3}$$

2d) L'application numérique conduit à $|\delta F_{\text{capa}}| \approx 2,5.10^{-12} \text{ N}$. Avec la valeur de la constante de

raideur $k = 1 \text{ N.m}^{-1}$, on obtient un déplacement de 2,5 picomètres ! Cet allongement du ressort est très faible lorsqu'on le compare aux dimensions évoquées dans le problème qui sont de l'ordre de la dizaine de nanomètres. Il était donc justifié de négliger l'influence de la force supplémentaire sur la position d'équilibre.

III Mesure de charges

1a) Nous allons utiliser l'équation de Poisson $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. Compte tenu des invariances, cette équation

devient tout simplement $\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ou 0.

1b) L'intégration donne $V_{z \leq h} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2 + az + b$ et $V_{z \geq h} = cz + d$. La détermination des constantes

d'intégration s'effectue en utilisant les conditions aux limites qui avec $U = 0$ donnent :

$$V_{z \leq h}(z=0) = 0 \quad \text{et} \quad V_{z \geq h}(z=l) = 0$$

Il nous faut encore deux relations. La première est issue de la continuité du potentiel en $z = h$ et la seconde de la continuité du champ électrique au même endroit. Cette dernière continuité est la conséquence de la modélisation volumique de la charge et provoque la continuité de la dérivée du potentiel :

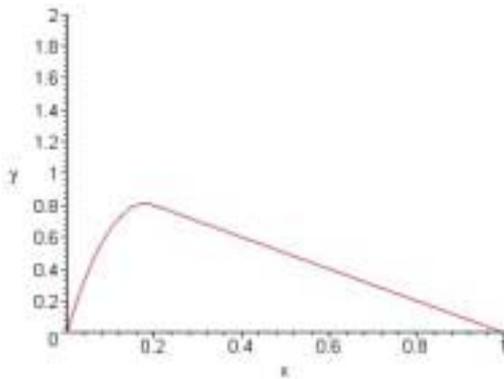
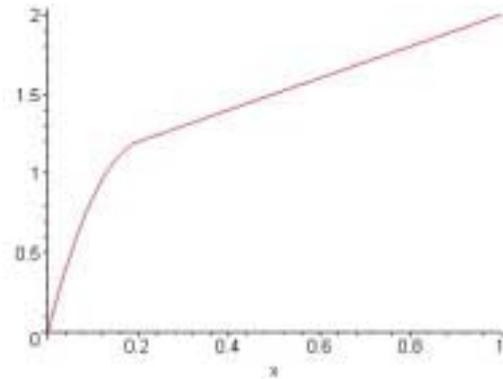
$$V_{z \leq h}(z=h) = V_{z \geq h}(z=h) \quad \text{et} \quad \frac{dV_{z \leq h}}{dz}(z=h) = \frac{dV_{z \geq h}}{dz}(z=h)$$

Tous calculs faits, nous trouvons :

$$V_{z \leq h} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} z^2 + \frac{\rho h}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{2l}\right) z \quad \text{et} \quad V_{z \geq h} = \frac{\rho h^2}{2\epsilon_0 l} (l - z)$$

Le champ électrostatique est donc $E_z = -\frac{dV_{z \geq h}}{dz}(z=l) = \frac{\rho h^2}{2\epsilon_0 l}$.

1c) L'allure du potentiel est donnée sur la figure 1 qui suit.

Fig. 1 : $V(z)$ $U = 0$ Fig. 2 : $V(z)$ $U \neq 0$

2a) Le potentiel dans cette nouvelle situation est la somme du potentiel calculé avant et de $V' = U \frac{z}{l}$.

En effet, le champ, en l'absence de charge entre les deux armatures, est uniforme. Le calcul de la loi du potentiel en fonction de z est donc particulièrement simple. Afin de prouver que la solution est la somme de ces deux potentiels, il faut s'assurer que le potentiel somme obéit bien à l'équation de Poisson. Ceci est évident puisque, dans le cas du condensateur sans charge, la charge volumique est nulle en tout point. De la même façon, la vérification des conditions aux limites est évidente, toujours pour le potentiel somme des deux précédents.

2b) La représentation du nouveau potentiel est faite ci-dessus à la figure 2.

3a) On a $\vec{E} = -\frac{dV_{\text{tot}}}{dz}(z=l)\vec{e}_z = \left(\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0 l} - \frac{U}{l}\right)\vec{e}_z$. Nous travaillons au niveau de l'armature haute,

par conséquent la normale sortante est orientée vers la bas. Le théorème de Coulomb appliqué à la surface de ce conducteur donne $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$. Ainsi, on peut déterminer la densité surfacique de

$$\text{charge : } \sigma = \frac{\varepsilon_0 U}{l} - \frac{\rho h^2}{2l}.$$

3b) Nous avons vu avant que le champ électrique subi par l'armature haute représentait la moitié du champ électrique total. La charge de l'armature étant égale à σS , la force exercée sur celle-ci est

$$\text{donc } \vec{F} = -\left(\frac{\varepsilon_0 U}{l} - \frac{\rho h^2}{2l}\right)^2 \frac{S}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z. \text{ En introduisant la charge } q, \text{ il vient :}$$

$$\vec{F} = -\left(U - \frac{qh}{2\varepsilon_0 S}\right)^2 \frac{\varepsilon_0 S}{2l^2} \vec{e}_z$$

3c) Si $q=0$, la force devient $\vec{F} = -\frac{U^2 \varepsilon_0 S}{2l^2} \vec{e}_z$, c'est le terme de capacité. Le terme de charge est

donc l'autre pour $U=0$. En développant le terme au carré et en négligeant le terme en q^2 , la force

prend l'expression : $\vec{F} = \left(-\frac{U^2 \varepsilon_0 S}{2l^2} + \frac{qhU}{2l^2}\right) \vec{e}_z$. La force supplémentaire due à la charge est donc :

$$\vec{F}_q = \frac{qhU}{2l^2} \vec{e}_z$$

Ici, la variation de la constante de raideur est $\delta k = -\frac{dF_q}{dl} = \frac{qhU}{l^3}$. La variation de pulsation propre de l'oscillateur est par conséquent :

$$\delta\omega_q = \frac{\omega_0}{2k} \frac{qhU}{l^3}$$

3d) Nous avons démontré avant que $\delta\omega_h = -\frac{3\omega_0}{2k} \frac{\epsilon_0 Sh}{l^4} U^2$. On peut donc observer que pour distinguer les causes de variation de pulsation propre créée par effet de relief ou par effet de charge, il suffit de changer le signe de la tension U . Le décalage sera toujours dans le sens d'une diminution pour l'effet de relief alors qu'il se produira soit une augmentation, soit une diminution pour l'effet de charge.

4a) La charge minimale détectée dépend de la valeur minimale détectée pour la mesure de la pulsation propre. Nous avons trouvé que $\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = 2 \cdot 10^{-5}$. Ainsi :

$$q_{\text{mini}} = \frac{4 \cdot 10^{-5} \epsilon_r k l^3}{hU} \approx 2 \cdot 10^{-18} \text{ C}$$

Ainsi, on peut mesurer jusqu'à 13 charges élémentaires environ !

4b) On trouve que $R = -\frac{1}{3} \frac{ql}{\epsilon_0 \epsilon_r S U}$. En utilisant la définition de la capacité du condensateur plan, on

obtient $Q_M = \frac{\epsilon_0 S}{l} U$. On peut donc conclure sur : $R = -\frac{q}{3\epsilon_r Q_M}$. Le terme de charge dépend de

$1/l^3$, celui de relief de $1/l^4$. Afin d'améliorer la visibilité du terme de charge, il ne faut pas prendre l trop petit et donc ne pas se mettre au plus près de la surface à observer.

IV Analyse de résultats expérimentaux

1) $\delta\omega_q = \frac{\omega_0}{2k} \frac{qhU}{l^3}$ et on constate que δf_q (fréquence) est négatif comme la tension U . Ainsi la q charge détectée est positive.

2) A l'aide du schéma, on trouve que $R = \delta f_q / \delta f_h \approx 0,9$. On peut donc calculer la charge q selon :

$$q = -\frac{R3\epsilon_0 \epsilon_r S U}{l} \approx 3,4 \cdot 10^{-17} \text{ C}$$

Cela représente environ 215 charges élémentaires positives.