DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

La glace dans la nature

I Le problème de Stefan

1. a) La loi de Fourier $\vec{J}_Q = -\lambda_G \overrightarrow{grad}(T_G)$ devient, pour ce problème unidimensionnel, $J_{Qz} = -\lambda_G \dfrac{\partial T_G}{\partial z}$.

b) L'équation de bilan local d'enthalpie (on est ici à pression constante, sans sources volumiques d'enthalpie) est $div(\vec{J}_Q) + \rho_G c_G \dfrac{\partial T_G}{\partial t} = 0$. En la combinant avec la loi de Fourier, on obtient $\boxed{\lambda_G \Delta(T_G) = \rho_G c_G \dfrac{\partial T_G}{\partial t}}$ (λ_G est uniforme). À une dimension, $\lambda_G \dfrac{\partial^2 T_G}{\partial z^2} = \rho_G c_G \dfrac{\partial T_G}{\partial t}$.

c) Les conditions aux limites sont : $\forall\, t > 0\ \ T_G(0,t) = T_S$ et $T_G(\xi(t),t) = T_F$. Elles ne permettraient de déterminer T_G que si on connaissait la fonction $\xi(t)$ (il n'y a pas lieu d'introduire de conditions initiales car, à $t = 0$, ξ est nul ; il n'y a pas de glace).

d) La phase liquide est en contact thermique avec un système plus froid (la glace). Elle ne peut alors que se refroidir. Mais, étant au départ à T_F sous la pression d'équilibre correspondante, elle ne peut se refroidir qu'en se solidifiant. La partie non solidifiée ne s'est donc pas refroidie et est restée à la température uniforme T_F. La densité de courant d'énergie thermique est donc nulle dans la phase liquide (utile pour **2.b.**).

e) Le volume massique de la glace est plus élevé que celui du liquide. Une masse donnée solidifiée occupe donc plus de place qu'avant sa solidification. Comme la paroi est fixe, le liquide est repoussé dans le sens z croissant. L'eau a une vitesse uniforme perpendiculaire à la paroi fixe.

2. a) Entre t et $t+dt$ la masse de glace a augmenté de $\boxed{dm = \rho_G S \dot{\xi}(t)\, dt}$.

b) Pour la masse dm (système fermé), la solidification à la température de fusion s'accompagne d'une variation d'enthalpie $-Ldm$ qui (à pression constante et sans travail autre que celui des forces de pression) est égale à l'énergie thermique reçue. Cette dernière intervient uniquement en $z = \xi(t)$ (à travers la surface S) car le courant thermique dans le liquide en $z = \xi(t+dt)$ est nul (voir **1.d.**). Alors $-Ldm = -Sdt\lambda_G \left.\dfrac{\partial T_G}{\partial z}\right|_{\xi(t)}$.

c) On remplace dm par l'expression du **2.a)** pour obtenir :

$$\boxed{\rho_G L \dot{\xi}(t) = \lambda_G \left.\frac{\partial T_G}{\partial z}\right|_{\xi(t)}} \qquad (1)$$

3. a) On ne peut atteindre un régime permanent car :
i) la condition limite $T = T_F = Constante$ est imposée en une position ξ variable au cours du temps.
ii) $T_F \neq T_S$ (donc la solution permanente T_G uniforme égale à T_S n'est pas possible ici).

b) Si on annule la dérivée temporelle dans l'équation de la chaleur, on en déduit que $\dfrac{\partial^2 T_G}{\partial z^2}$ est nulle donc que T_G est fonction affine de z. Avec les conditions aux limites $T_G = T_S + \dfrac{z}{\xi}(T_F - T_S)$. Alors $\dfrac{\partial T_G}{\partial z} = \dfrac{T_F - T_S}{\xi}$.

c) L'équation (1) conduit à $\lambda_G \dfrac{T_F - T_S}{\xi} = \rho_G L \dot{\xi}$. On pose $D = \lambda_G \dfrac{T_F - T_S}{\rho_G L}$. L'équation s'écrit $\boxed{\xi\dot{\xi} = D}$ qui, compte tenu de la nullité de ξ à $t = 0$, s'intègre en $\xi^2 = 2Dt$. L'évolution de x en $\sqrt{t}$ est classique dans un problème de diffusion. Ici, D n'est pas le coefficient de diffusion thermique de la glace mais il joue un rôle analogue.

d) *Application numérique* : $D = 2{,}18 \times 10^{-7}\, \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

Durée	un jour	une semaine	un mois (30 jours)	six mois (182,6 jours)
Épaisseur	19 cm	51 cm	1,06 m	2,62 m

II Effet d'une couche de neige

1. Comme au **I.3.b)**, la température est fonction affine de z dans chaque phase. La densité de courant d'énergie (normale) est continue à l'interface neige/glace.

2. $J_{Qz} = \lambda_n \dfrac{T_S - T_{nG}}{h_n} = \lambda_G \dfrac{T_{nG} - T_F}{\xi}$. Avec la seconde égalité on calcule $T_{nG} = \dfrac{T_S \dfrac{\lambda_n}{h_n} + T_F \dfrac{\lambda_G}{\xi}}{\dfrac{\lambda_n}{h_n} + \dfrac{\lambda_G}{\xi}}$ (analogue thermique de la relation de Millmann) et, avec la première, on en déduit $\boxed{J_{Qz} = \dfrac{T_S - T_F}{\dfrac{\xi}{\lambda_G} + \dfrac{h_n}{\lambda_n}}}$.

Remarque 1 : Cette dernière expression s'obtient plus rapidement avec le concept de résistance thermique : le dénominateur correspond à l'association en série des deux résistances surfaciques $\dfrac{\xi}{\lambda_G}$ (glace) et $\dfrac{h_n}{\lambda_n}$ (neige).

Remarque 2 : L'expression obtenue est la même que celle utilisée à la question **I.3.c)** au remplacement près de $\dfrac{\xi}{\lambda_G}$ par $\dfrac{\xi}{\lambda_G} + \dfrac{h_n}{\lambda_n}$ c'est à dire qu'on remplace ξ par $\xi_{\text{eff}} = \xi + \xi_n$ avec $\boxed{\xi_n = h_n \dfrac{\lambda_G}{\lambda_n}}$. ξ_n représente l'épaisseur de glace qui offrirait la même résistance thermique que la couche de neige.

3. La remarque 2 précédente et le fait que $\dot{\xi} = \dot{\xi}_{\text{eff}}$ permettent d'utiliser directement les résultats du **I.3.c)**. L'équation d'évolution $\xi_{\text{eff}} \dot{\xi}_{\text{eff}} = D$ a pour solution (avec la condition $\xi_{\text{eff}}(0) = \xi_n$) $\xi_{\text{eff}}^2 = 2Dt + \xi_n^2$ d'où, en revenant à ξ : $\boxed{\xi = \sqrt{2Dt + \xi_n^2} - \xi_n}$.

4.

Durée	un jour	une semaine	un mois (30 jours)	six mois (1/2 an)
Sans neige	19 cm	51 cm	1,06 m	2,62 m
Avec neige	1,3 cm	8,7 cm	34 cm	1,53 m

5. La neige, en ajoutant une couche peu conductrice, rend beaucoup moins efficace la croissance de la glace tant que celle-ci n'est pas d'épaisseur grande devant $\xi_n = 1{,}48$ m , c'est à dire pendant plusieurs mois.

III Variation saisonnière de la glace arctique

Suivant les instructions de l'énoncé, les températures seront exprimées en degré Celsius. En particulier, T_F sera, dans la suite, systématiquement remplacé par 0.

1. a) La température dans la glace est $T_G(z,t) = T(t)\left(1 - \dfrac{z}{h_0}\right)$. La couche de cote z, de section S et d'épaisseur dz subit une variation d'enthalpie $\rho_G c_G S dz \left(1 - \dfrac{z}{h_0}\right) dT$ donc la variation totale d'enthalpie par unité de surface est $\displaystyle\int_0^{h_0} \rho_G c_G dz \left(1 - \frac{z}{h_0}\right) dT = \rho_G c_G \frac{h_0}{2} dT$.

b) En identifiant cette variation d'enthalpie au transfert thermique surfacique $B_N (T_N - T) dt$ on obtient l'équation $\boxed{\dfrac{dT}{T - T_N} = -\dfrac{dt}{\tau_0}}$ avec $\boxed{\tau_0 = \dfrac{\rho_G c_G h_0}{2 B_N}}$ qui s'intègre en $\ln \dfrac{T - T_N}{-T_N} = -\dfrac{t}{\tau_0}$ donc $\boxed{T = T_N\left(1 - e^{-t/\tau_0}\right)}$.

c) Le flux thermique dans la banquise est, par unité de surface, $-\lambda_G \dfrac{\partial T_G}{\partial z} = \dfrac{\lambda_G}{h_0} T$. Il devient égal au flux à l'interface air-banquise lorsque $\dfrac{\lambda_G}{h_0} T = B_N (T_N - T)$ c'est à dire $\boxed{T = T_0 = \dfrac{T_N}{1 + h_N / h_0}}$. $\boxed{h_N = \dfrac{\lambda_G}{B_N}}$ représente l'épaisseur de glace qui aurait la résistance thermique associée à l'interface air-banquise (coefficient conducto-convectif B_N).

d) D'après la question **b)** T vaut T_0 lorsque $t = t_0 = \tau_0 \ln \dfrac{-T_N}{T_0 - T_N}$ c'est à dire que $\boxed{t_0 = \tau_0 \ln\left(1 + \dfrac{h_0}{h_N}\right)}$.

e) $\boxed{h_N = 1{,}23 \text{ m}}$. Voir le tableau à la fin du corrigé pour les autres applications numériques. Le temps caractéristique τ_0 est proportionnel à l'épaisseur initiale et la durée de cette première phase augmente plus vite que h_0.

2. a) D'après la loi de Fourier, la densité de courant thermique est $J_{Qz} = \lambda_G \dfrac{T}{h}$. Elle est égale au flux imposé en surface donc $\lambda_G \dfrac{T}{h} = B_N\left(T_N - T\right)$ qui conduit à $T = \dfrac{T_N}{1 + h_N / h}$ (relation analogue à celle du **1.c.**)

b) On en déduit $J_{Qz} = \lambda_G \dfrac{T_N}{h + h_N}$. Comme dans la partie **II**, on se ramène à la partie **I** (question **3.c.**) en remplaçant ξ par h+h_N, T_S par T_N et avec la contrainte initiale que h vaut h_0 à $t = t_0$. L'équation d'évolution est $\left(h + h_N\right)\dot{h} = D$.

Donc $\boxed{\left(h + h_N\right)^2 = 2D\left(t - t_0\right) + \left(h_0 + h_N\right)^2}$ avec ici $D = -\dfrac{\lambda_G T_N}{\rho_G L}$ qui peut s'écrire $D = \dfrac{h_N^2}{2\tau_N}$ en utilisant la constante de temps τ_N introduite par l'énoncé. $\left(h + h_N\right)^2 = h_N^2 \dfrac{t - t_0}{\tau_N} + \left(h_0 + h_N\right)^2$ d'où $\boxed{h = h_N\left(\sqrt{\dfrac{t - t_0}{\tau_N} + \left(1 + \dfrac{h_0}{h_N}\right)^2} - 1\right)}$.

c) Voir le tableau ci-dessous ($h_{1/2}$ est obtenu en remplaçant t par 6 mois, $T_{1/2}$ l'est à l'aide du **III.2.a.**). L'épaisseur n'augmente notablement pendant la nuit arctique que si elle est au départ inférieure à 3 m.

3. a) Le problème est exactement le même qu'à la question **III.1.b)** en remplaçant (B_N,T_N) par (B_J,T_J) et h_0 par $h_{1/2}$. $\dfrac{dT}{T - T_J} = -\dfrac{dt}{\tau_1}$ s'intègre avec la condition initiale $T(0) = T_{1/2}$ en $\ln\left(\dfrac{T - T_J}{T_{1/2} - T_J}\right) = -\dfrac{t}{\tau_1}$. La date t_1 est obtenue lorsque T est nulle donc $\boxed{t_1 = \tau_1 \ln\left(1 - \dfrac{T_{1/2}}{T_J}\right)}$.

b) Voir tableau en fin de corrigé. t_1 est à peu près proportionnel à l'épaisseur de banquise $h_{1/2}$ (influence de τ_1).

4. a) Le seul flux thermique reçu par la banquise l'est à sa surface supérieure qui est à la température de changement d'état $T_F = 0$ sous la pression constante de 1 atmosphère. Si on suppose que l'eau liquide est évacuée, le flux surfacique vaut $B_J\left(T_J - T_F\right)$ et est constant. Le bilan enthalpique $\rho_G L\left(-\dot{h}\right) = B_J T_J$ montre que l'épaisseur de la banquise décroît à la vitesse constante $-\dfrac{B_J T_J}{\rho_G L}$ (qui vaut 6,23 mm par jour) donc $\boxed{h = h_{1/2} - \dfrac{B_J T_J}{\rho_G L}\left(t - t_1\right)}$.

b) Voir le tableau ci-dessous. L'épaisseur finale est fonction croissante de l'épaisseur initiale. La pente de cette fonction est inférieure à 1. La suite des épaisseurs prises d'année en année convergera donc vers la valeur stationnaire qui vérifie $h_{\text{finale}} = h_{\text{initiale}}$ et qui est très proche de 3 m. Ceci suppose bien sûr que les conditions météorologiques se reproduisent à l'identique d'année en année.

épaisseur initiale h_0	1,0 m	3,0 m	5,0 m
T_0 (°C)	-19,4	-30,7	-34,7
τ_0 (jours)	6,1	18,4	30,7
t_0 (jours)	3,7	22,8	49,9
$h_{1/2}$ (m)	2,60	3,93	5,55
$T_{1/2}$ (°C)	-29,4	-33,0	-35,4
t_1 (jours)	21,7	35,1	51,9
épaisseur finale (m)	1,60	3,01	4,74

Compléments

- La courbe représentant h_{finale} en fonction de h_0 est dessinée ci-contre. Elle coupe la diagonale $h_{\text{finale}} = h_0$ au point d'abscisse $h_0 = 3{,}04$ m avec une pente inférieure à 1. Le point fixe est stable.
- L'utilisation de lois affines pour $T_G(z)$ (régime quasi-stationnaire) peut être justifiée par le calcul du temps caractéristique d'établissement du régime stationnaire dans une couche d'épaisseur h : $\tau_{\text{stat}} = \dfrac{h^2}{\pi^2 D_G}$ où D_G est la diffusivité thermique de la glace $D_G = \dfrac{\lambda_G}{\rho_G c_G}$. L'application numérique pour h = 1 m conduit à un temps caractéristique de l'ordre de 1 jour qui est assez petit devant les durées considérées ici.