

Extrait de X MP 06 - Système de détection de rayonnement millimétrique

II. Cryogénie

II.1.a) Il faut faire le vide entre les différentes parois pour éviter la conduction et la convection thermiques.

II.1.b) Le réservoir d'hélium reçoit un flux thermique ce qui provoque une évaporation. Le flux thermique reçu est : $\Phi_{N_2 \rightarrow He} = \epsilon \sigma S(T_1^4 - T_0^4)$. Le bilan thermique s'écrit : $D_{He} L_{He} = \Phi_{N_2 \rightarrow He}$. On a donc :

$$D_{He} L_{He} = \epsilon \sigma (T_1^4 - T_0^4) S.$$

De même, pour le réservoir d'azote : $D_{N_2} L_{N_2} = \Phi_{He \rightarrow N_2} + \Phi_{atm \rightarrow N_2}$, avec $\Phi_{He \rightarrow N_2} = \epsilon \sigma S(T_0^4 - T_1^4)$ et $\Phi_{atm \rightarrow N_2} = \epsilon \sigma S(T_2^4 - T_1^4)$, soit :

$$D_{N_2} L_{N_2} = \epsilon \sigma S(T_0^4 + T_2^4 - 2T_1^4).$$

Enfin le bilan thermique de l'écran s'écrit : $0 = \Phi_{écran \rightarrow écran} + \Phi_{N_2 \rightarrow écran}$ soit : $0 = \epsilon \sigma S(T_1^4 + T_1^4 - 2T_2^4)$

II.1.c) La surface S vaut : $S = \pi \times \text{diamètre} \times \text{hauteur} + 2 \times \frac{1}{4} \pi (\text{diamètre})^2 = 1,0 \text{ m}^2$

La température de l'écran est donc : $T_2 = \left(\frac{T_1^4 + T_1^4}{2} \right)^{\frac{1}{4}} = 244,2 \text{ K}$.

Il vient ensuite : $D_{He} = 4,75 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et $D_{N_2} = 4,96 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

La consommation d'hélium est : $\frac{D_{He} \times 86400}{\rho_{He}} = 3,28 \text{ L par jour}$

et la consommation d'azote : $\frac{D_{N_2} \times 86400}{\rho_{N_2}} = 5,36 \text{ L par jour}$.

Le réservoir d'hélium ayant un volume de $\frac{\pi \times (0,4)^2 \times 0,6}{4} = 0,0754 \text{ m}^3$, tout l'hélium est évaporé en

$\frac{75,4}{3,28} \approx 23$ jours ; de même le réservoir d'azote est vidé en $\frac{80}{5,36} \approx 15$ jours. La durée d'autonomie de l'appareil est d'environ 15 jours.

II.2.a) L'énergie absorbée par la vaporisation est :

- pour un litre d'azote liquide : $L_{N_2} \rho_{N_2} = 159,2 \text{ kJ} \cdot \text{L}^{-1}$,

- pour un litre d'hélium liquide : $L_{He} \rho_{He} = 2,6 \text{ kJ} \cdot \text{L}^{-1}$.

L'énergie absorbée par le gaz résultant de la vaporisation lors de son chauffage de la température de vaporisation à 290 K est :

- dans le cas de l'azote : $\rho_{N_2} c_{N_2} (290 - 77) = 177 \text{ kJ} \cdot \text{L}^{-1}$,

- dans le cas de l'hélium : $\rho_{He} c_{He} (290 - 4) = 186 \text{ kJ} \cdot \text{L}^{-1}$.

L'énergie associée à l'échauffement est bien plus grande, dans le cas de l'hélium, que l'énergie correspondant à la vaporisation.

II.2.b) Équations de bilan thermique en régime permanent :

- de l'hélium liquide : $D_{He} L_{He} = \epsilon \sigma S(T_1^4 - T_0^4)$

- de l'écran à T_1 : $0 = \epsilon \sigma S(T_2^4 + T_0^4 - 2T_1^4) - D_{He} c_{He} (T_1 - T_0)$

- de l'écran à T_2 : $0 = \epsilon \sigma S(T_1^4 + T_1^4 - 2T_2^4) - D_{He} c_{He} (T_2 - T_1)$

II.2.c) Avec les approximations suggérées les équations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} D_{He} L_{He} = \epsilon \sigma S T_1^4 \\ 0 = \epsilon \sigma S T_2^4 - D_{He} c_{He} T_1 \\ 0 = \epsilon \sigma S (T_1^4 - 2T_2^4) - D_{He} c_{He} (T_2 - T_1) \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent : $T_2^4 = \frac{D_{He} c_{He} T_1}{\epsilon \sigma S}$ et $T_1^4 = \frac{T_2^5}{\epsilon \sigma S}$

En reportant cette expression de T_2 dans la troisième (divisée par $\epsilon \sigma S$) et en utilisant encore une fois la première on trouve :

$$0 = T_1^4 - 2 \frac{T_1^5}{T_0} - \frac{T_1^4}{T_0} \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{1}{4}} - T_1$$

soit aussi : $\left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{T_1}{T_0} \left(1 + \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{1}{4}} \right)$.

Applications numériques : $T_0 = 4,04 \text{ K}$ (le fait que cette température soit proche de la température de vaporisation est une pure coïncidence). Une résolution numérique (Maple) donne : $T_1 = 97,7 \text{ K}$.

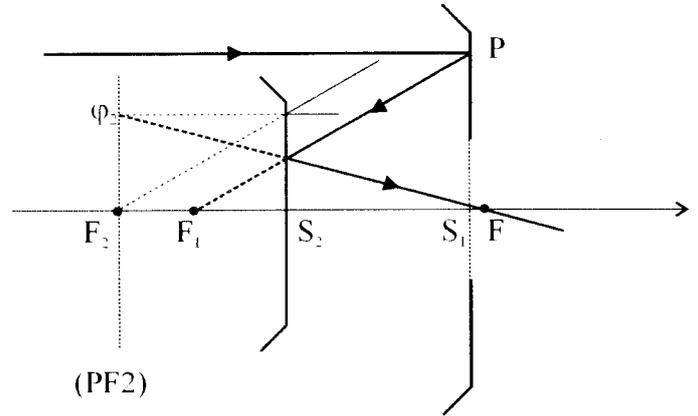
Dans ce cas : $D_{He} = 12,3 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et $T_2 = 217 \text{ K}$.

II.3. Le deuxième système ne consomme pas d'azote, mais il consomme 2 à 3 fois plus d'hélium que le premier. Il faut envisager un système avec réservoir d'azote et échangeurs thermiques.

Étude d'un système de détection de rayonnement millimétrique (partie de X MP 2006)

III. Étude du système optique

III.1.a) Le rayon parallèle à l'axe arrivant en P se réfléchit sur M_1 en un rayon passant par le foyer F_1 de ce miroir. Pour construire le rayon réfléchi sur M_2 , on trace un rayon parallèle dont le prolongement passe par F_2 , rayon qui se réfléchit sur M_2 en un rayon parallèle à l'axe ; le rayon réfléchi cherché et ce dernier rayon se coupent en un point φ_2 du plan focal (PF_2) de M_2 ce qui permet de finir le tracé.



III.1.b) F est l'image de F_1 par réflexion sur M_2 ce qui se traduit par la relation de conjugaison : $\frac{1}{S_2 F} + \frac{1}{S_2 F_1} = \frac{1}{S_2 F_2} = -\frac{1}{f_2}$ (attention le miroir est convexe et par définition $f_2 > 0$). On en

déduit immédiatement : $\overline{S_2 F} = \frac{f_2 \overline{F_1 S_2}}{f_2 - \overline{F_1 S_2}}$.

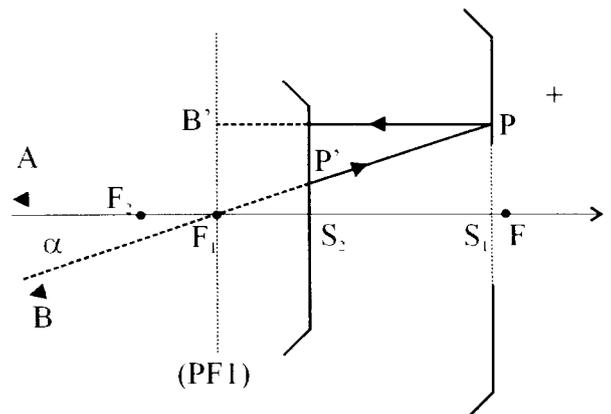
III.1.c) $\overline{S_2 F}$ est positif si et seulement si $0 < \overline{F_1 S_2} < f_2$, c'est-à-dire si et seulement si F_1 est situé entre F_2 et ce qui se traduit par les deux inégalités : $\overline{S_1 S_2} < f_1$ et $\overline{F_1 S_2} < f_2$.

III.1.d) $\overline{S_1 F} = \overline{S_1 F_1} + \overline{F_1 S_2} + \overline{S_2 F} = -f_1 + \overline{F_1 S_2} + \frac{f_2 \overline{F_1 S_2}}{f_2 - \overline{F_1 S_2}} = \frac{(-f_1 + \overline{F_1 S_2})(f_2 - \overline{F_1 S_2}) + f_2 \overline{F_1 S_2}}{f_2 - \overline{F_1 S_2}}$

Sachant que $\overline{F_1 S_2} < f_2$, nous pouvons dire que $\overline{S_1 F} > 0$ si et seulement si : $f(\overline{F_1 S_2}) > 0$ où $f(x) = -x^2 + (2f_2 + f_1)x - f_1 f_2$. Ceci est réalisé si et seulement si :

$$\underline{f_2 + \frac{f_1}{2} - \sqrt{f_2^2 + \frac{f_1^2}{4}} < \overline{F_1 S_2} < f_2 + \frac{f_1}{2} + \sqrt{f_2^2 + \frac{f_1^2}{4}}.}$$

III.2.a) Supposons que l'axe optique soit dirigé vers le bord A de l'objet et notons B le point situé à l'infini dans la direction faisant l'angle α avec l'axe optique. L'image par M_1 de B est un point B' du plan focal (PF_1) de M_1 que l'on détermine en traçant le rayon venant de B passant par F_1 . L'observation de la figure donne : $\overline{F_1 B'} = \overline{S_1 P} = f_1 \tan(\alpha) \approx f_1 \alpha$.



Enfin, l'image B'' de B' par M_2 est dans le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par F et vérifie : $\overline{FB''} = \gamma_2 \overline{F_1 B'}$ où γ_2 est le grandissement

algébrique introduit par M_2 qui est donné, d'après les formules de conjugaison du miroir sphérique.

par : $\gamma = -\frac{S_2 F}{S_2 F_1}$. Ainsi, la taille de l'image fournie est : $\overline{FB''} = -\frac{S_2 F}{S_2 F_1} f_1 \alpha = \frac{f_1 f_2}{f_2 - F_1 S_2} \alpha$.

III.2.b) Une lentille mince convergente de distance focale f (positive), donne d'un objet situé à l'infini de diamètre angulaire α , une image réelle située dans son plan focal image de taille $f\alpha$. D'après la question précédente, le système des deux miroirs est équivalent à une lentille convergente de distance focale : $f = \frac{f_1 f_2}{f_2 - F_1 S_2}$.

III.2.c) La condition de la question III.1.d) est : $0,73 < \overline{F_1 S_2} < 5,23 \text{ m}$; elle est bien vérifiée. On trouve $f = 3,33 \text{ m}$ et $\overline{S_2 F} = 1,33 \text{ m}$.

III.2.d) Les avantages du montage de Cassegrain par rapport à une unique lentille convergente sont :

- un encombrement moindre (0,8m au lieu de 3,33m),
- l'absence d'aberrations chromatiques (dues à la dispersion par le verre de la lentille).

III.2.e) Le miroir M_2 doit être suffisamment grand pour recueillir tous les rayons venant de M_1 mais pas trop grand car il obture partiellement M_1 . La meilleure valeur pour R_2 est donc telle qu'un rayon parallèle à l'axe optique frappant sur le bord de M_1 , pour lequel $S_1 P = R_1$, frappe M_2 au bord, c'est-à-dire en P' tel que $S_2 P' = R_2$ (voir figure de la question III.2.a), le rayon étant dans l'autre sens). Or :

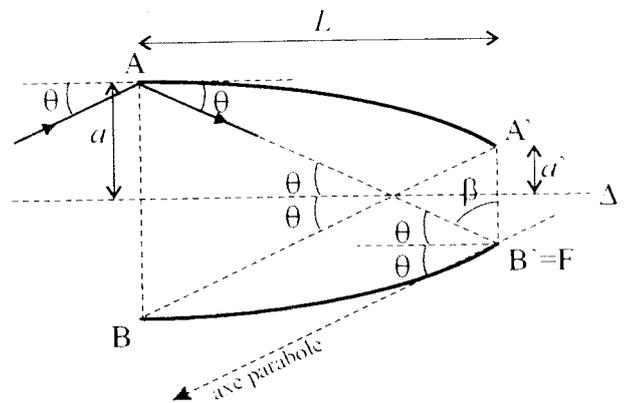
$\frac{S_2 P'}{S_1 P} = \frac{F_1 S_2}{f_1}$. La valeur optimale du rapport des rayons est donc : $\frac{R_2}{R_1} = \frac{F_1 S_2}{f_1} = 0,4$.

La surface collectrice de l'antenne est un disque de rayon R_1 privé d'un disque de rayon R_2 ; elle vaut

dans ce cas : $\pi R_1^2 \left(1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right) = 0,660 \text{ m}^2$.

III.3.a) N.B. : L'énoncé donne sur la figure 6b une indication géométrique qui ne figure pas dans le texte : l'angle θ entre Δ et FA est aussi l'angle entre Δ et l'axe de la parabole (AA'). Cette propriété provient du fait que la tangente à (AA') en A est parallèle à l'axe Δ . Imaginons en effet, dans le plan méridien de la figure, un rayon arrivant en A qui se réfléchisse suivant AF ; ce rayon fait avec Δ l'angle θ ; or il est, d'après une propriété bien connue de la parabole, nécessairement parallèle à l'axe de la parabole car il se réfléchit en passant par le foyer F ; par suite l'angle entre Δ et l'axe de (AA') est égal à θ .

On peut alors remarquer que l'axe de la parabole (AA') est parallèle à $A'B$.



L'angle polaire $\varphi_{A'}$ repérant le point A' est $\varphi_{A'} = 2\theta + \beta$ où l'angle β est défini sur la figure ci-dessus qui est clairement $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$, soit : $\varphi_{A'} = \frac{\pi}{2} + \theta$. L'équation de la parabole donne alors :

$$FA' = 2a' = \frac{2f_w}{1 - \cos(\pi/2 + \theta)} \text{ soit } f_w = a'(1 + \sin \theta).$$

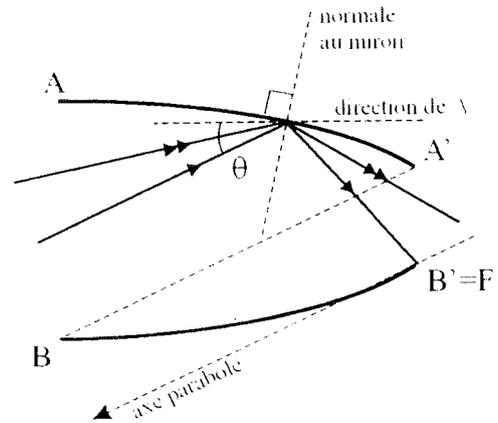
III.3.b) En observant la figure on trouve facilement : $L = \frac{a+a'}{\tan \theta}$.

III.3.c) L'angle polaire φ_A repérant le point A est $\varphi_A = 2\theta$. D'après l'équation de la parabole :

$$FA = \frac{2f_w}{1 - \cos(2\theta)} = \frac{L}{\cos \theta} \text{ donc } \frac{2a'(1 + \sin \theta)}{1 - \cos(2\theta)} = \frac{a+a'}{\cos \theta \tan \theta}, \text{ soit } \underline{a' = a \sin \theta}.$$

III.3.d) Un rayon qui pénètre dans le collecteur en faisant avec la direction de Δ un angle exactement égal à θ se réfléchit en passant par $F = B'$ puisqu'il est parallèle à l'axe de la parabole. Comme on le voit sur la figure ci-contre, un rayon moins incliné par rapport à Δ sort par l'ouverture $A'B'$ après réflexion. Il peut aussi traverser le collecteur sans être réfléchi puisque BA' est parallèle à l'axe de la parabole.

Ainsi, tout rayon incliné par rapport à Δ d'un angle plus faible que $\theta_w = \theta = \arcsin\left(\frac{a'}{a}\right)$ arrivant sur l'ouverture AB du collecteur sort par l'ouverture $A'B'$.



Que peut-on dire d'un rayon plus fortement incliné ? Il ne peut traverser le collecteur sans rencontrer (AA') ; lors de sa première réflexion, il est renvoyé sur (BB') . Peut-il sortir par $A'B'$ après deux ou plusieurs réflexions ? Il faudrait pour cela qu'il arrive sur l'une des deux paraboles avec une inclinaison par rapport à Δ inférieure à θ . Or cela est impossible, car un rayon allant d'un point de (AA') à un point de (BB') est obligatoirement plus incliné que la droite AB' (et s'il va de (AA') à (BB') , il est plus incliné que $A'B$) qui fait précisément avec Δ l'angle θ (comme $A'B$). Ainsi : un rayon entrant dans le collecteur avec une inclinaison plus grande que θ_w en ressort toujours.

III.3.e) L'intérêt du collecteur est double :

- on recueille sur la surface $A'B'$ les rayons arrivant sur une surface plus grande AB ;
- on sélectionne les rayons ayant la direction de l'axe Δ à θ_w près, ce qui permet d'éliminer le rayonnement parasite.

N.B. : il y a une erreur d'énoncé : Φ_d est le **rayon** de la tache centrale de diffraction observée dans le plan focal du télescope.

$$\text{III.4.a) } a = \Phi_d = 3,33 \times \frac{1,22 \times 1,10^{-3}}{2 \times 0,5} = 4,06 \text{ mm}.$$

III.4.b) L'inclinaison maximale par rapport à l'axe optique des rayons réfléchis sur M_2 qui parviennent en F est : $\theta_{\max} \approx \tan \theta_{\max} = \frac{R_2}{S_2 F}$. Pour recueillir dans le collecteur tous les rayons issus de M_2 le

meilleur choix est : $\theta_w = \frac{R_2}{S_2 F} = 0,150 \text{ rad}$. Dans ce cas, la longueur du collecteur est, d'après III.3.b) et

$$\text{c) : } L = \frac{a(1 + \sin \theta_w)}{\tan \theta_w} = 3,08 \text{ cm}.$$