



ASTRÉE



Machine pour essais mécaniques multiaxiaux

X – ENS Cachan – 1997

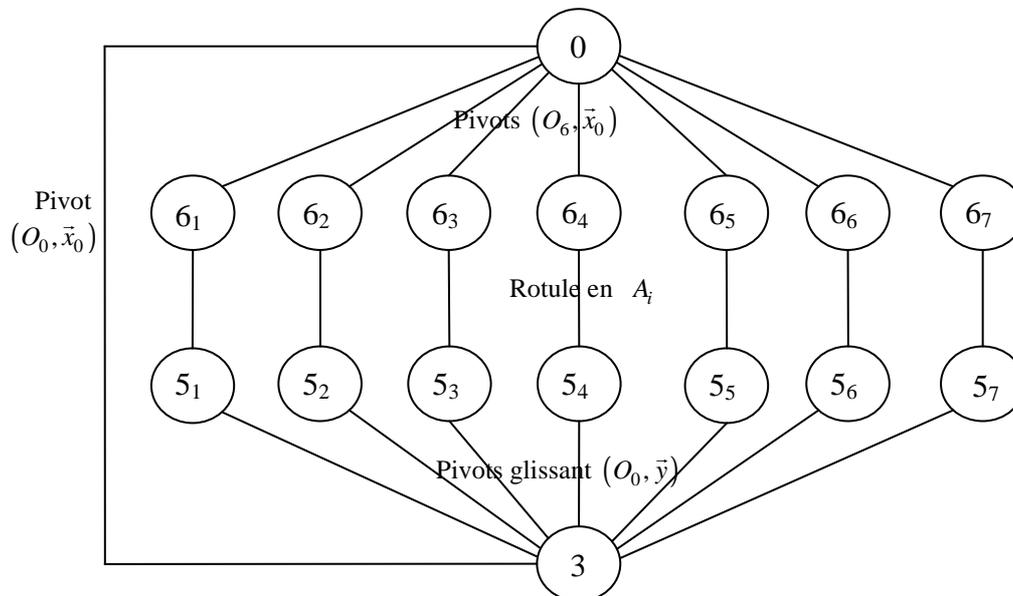
Éléments de correction

Étude de la pompe hydraulique

1.

Liaison	Modélisation	Justification
L_{30}	Pivot (O_0, \vec{x}_0)	Contact cylindre/cylindre entre 3 et 4 Arrêt axial par surface plane entre 3 et 0
L_{53}	Pivot glissant (O_0, \vec{y})	Contact cylindre / cylindre
L_{56}	Rotule en A	Contact sphère/sphère
L_{60}	Pivot (O_6, \vec{x}_0)	Contact cylindre/cylindre

2. Graphe des liaisons



3. Nombre d'inconnues cinématiques : $I_c = 1 + 7 \cdot [1 + 3 + 2] = 43$

Nombre d'équations : On a $\mu = 7$ cycles indépendants soit $E_c = 6 \cdot \mu = 42$

Ainsi, le mécanisme a une mobilité $m = I_c - E_c$

$$\text{AN } \boxed{m=1}$$

4. Nombre d'inconnues statiques : $I_s = 5 + 7 \cdot [5 + 3 + 4] = 89$

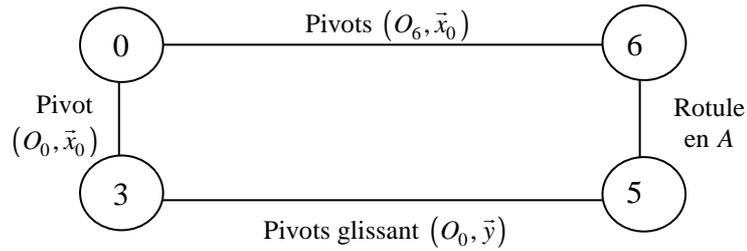
On peut isoler $n = 15$ systèmes ce qui conduit à écrire $E_s = 6 \cdot N = 90$ équations

Ainsi, le mécanisme a une mobilité $m = E_s - I_s$

$$\text{AN } \boxed{m=1}$$

5. Les liaisons sont supposées parfaites.

6. Graphe des liaisons



$$I_c = 1 + 7 = 8 ; E_c = 6 \text{ donc } \boxed{m=1}$$

7. Torseurs cinématiques des liaisons

$$\{V_{30}\}_{o_0} = \begin{Bmatrix} \bar{\Omega}(3/0) = \omega_{30}\bar{x}_0 = \dot{\theta}\bar{x}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix} ; \{V_{53}\}_{o_0} = \begin{Bmatrix} \bar{\Omega}(5/3) = \omega_{53}\bar{y} \\ \bar{V}_{o_0}(5/3) = v_{53}\bar{y} \end{Bmatrix} ; \{V_{56}\}_A = \begin{Bmatrix} \bar{\Omega}(5/6) \\ \bar{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{56} \\ q_{56} \\ r_{56} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(-,-,-)}$$

$$\{V_{60}\}_{o_0} = \begin{Bmatrix} \bar{\Omega}(6/0) = \omega_{60}\bar{x}_0 = \alpha\bar{x}_0 \\ \bar{0} \end{Bmatrix}$$

8. Liaison équivalente entre 3 et 6.

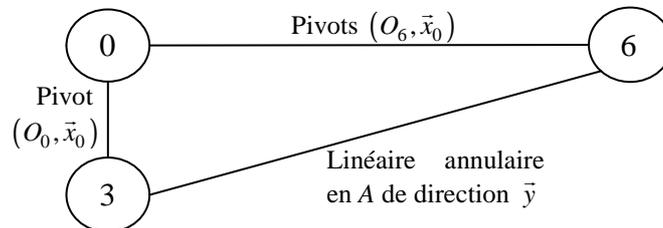
$$\{V_{63}\} = \{V_{65}\} + \{V_{53}\}$$

Vecteur rotations : $\bar{\Omega}(6/3) = \bar{\Omega}(6/5) + \bar{\Omega}(5/3)$ (complet 3 composantes)

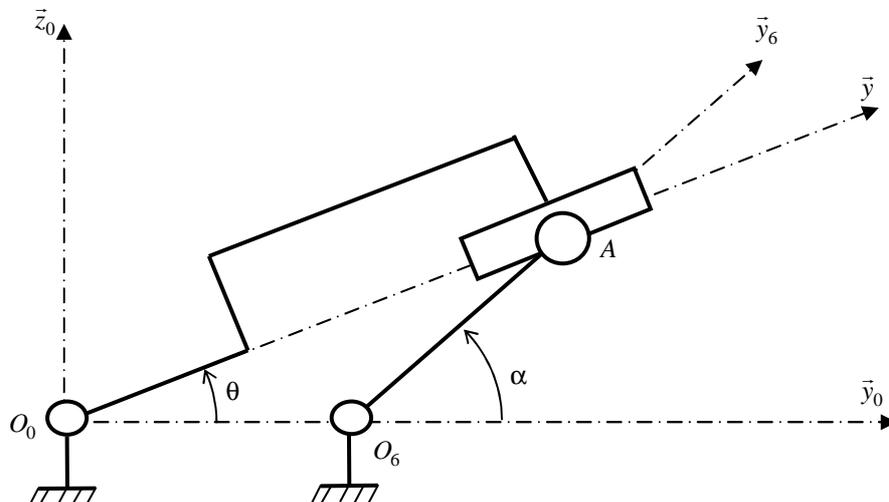
Vecteur vitesse en A : $\bar{V}_A(6/3) = \bar{V}_A(6/5) + \bar{V}_A(5/3) = \bar{V}_{o_0}(5/3) + \overline{AO_0} \wedge \bar{\Omega}(5/3) = v_{53}\bar{y}$

La liaison entre 3 et 6 est une linéaire annulaire (sphère cylindre) en A de direction \bar{y} .

9. Graphe des liaisons de cette modélisation simplifiée.



10. Schéma cinématique de l'ensemble des pièces {0, 3, 6}.



11. Torseur cinématiques

$$\{V_{30}\} = \begin{matrix} o_0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(3/0) = \omega_{30}\vec{x}_0 = \dot{\theta}\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \end{matrix}; \{V_{63}\} = \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(6/3) \\ \vec{V}_A(6/3) \end{array} \right\} \end{matrix} = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} p_{63} \\ q_{63} \\ r_{63} \end{array} \right\} \\ \left| \begin{array}{l} 0 \\ v_{63} \\ 0 \end{array} \right\} \end{matrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})}; \{V_{60}\} = \begin{matrix} o_6 \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(6/0) = \omega_{60}\vec{x}_0 = \dot{\alpha}\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \end{matrix}$$

Fermeture de chaîne cinématique : $\{V_{60}\} = \{V_{63}\} + \{V_{30}\}$

Composition des vecteurs rotations : $\vec{\Omega}(6/0) = \vec{\Omega}(6/3) + \vec{\Omega}(3/0)$

Soit, en projection sur $R(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dot{\theta} + p_{63} \\ q_{63} = 0 \\ r_{63} = 0 \end{cases}$$

Composition des vitesses en A : $\vec{V}_A(6/0) = \vec{V}_A(6/3) + \vec{V}_A(3/0)$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{o_6}(6/0) + \vec{AO}_6 \wedge \vec{\Omega}(6/0) &= \vec{V}_A(6/3) + \vec{V}_{o_0}(3/0) + \vec{AO}_0 \wedge \vec{\Omega}(3/0) \\ -r\vec{y}_6 \wedge \dot{\alpha}\vec{x}_0 &= v_{63}\vec{y} + -l\vec{y} \wedge \dot{\theta}\vec{x}_0 \\ e\dot{\alpha}\vec{z}_6 &= v_{63}\vec{y} + l\dot{\theta}\vec{z} \end{aligned}$$

Soit, en projection sur $R(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\begin{cases} 0 \\ -e\dot{\alpha}\sin(\alpha) = v_{63}\cos(\alpha) - l\dot{\theta}\sin(\theta) \\ e\dot{\alpha}\cos(\alpha) = v_{63}\sin(\alpha) + l\dot{\theta}\cos(\theta) \end{cases}$$

12. On a donc 6 inconnues cinématiques pour 5 équations, ce qui conduit à une mobilité $m=1$ à un degré d'hyperstatisme $h=6+m-Ic=1$

13. Pour rendre le système isostatique, il faut ajouter un degré de liberté sans modifier la mobilité. Il faut donc utiliser l'équation suivant \vec{x}_0 de la composition des vitesses en transformant une des liaisons pivots 3/0 ou 6/0 en liaison pivot glissant. En pratique, il y a un jeu entre les patins et l'anneau de maintien.

14. Bilan des actions exercées sur 5 :

$$\{T_{35}\} = \begin{matrix} B \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(3/5) \\ \vec{M}_B(3/5) \end{array} \right\} \end{matrix} = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} X_{35} \\ 0 \\ Z_{35} \end{array} \right\} \\ \left| \begin{array}{l} L_{35} \\ 0 \\ N_{35} \end{array} \right\} \end{matrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{T_{huile/5}\} = \begin{matrix} B \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(h/5) = Y_{h5}\vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \end{matrix}$$

Le solide 6 n'est soumis qu'à 2 forces donc on pourra poser :

$$\{T_{65}\} = \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(6/5) \\ \vec{0} \end{array} \right\} \end{matrix} = \begin{matrix} \left\{ \begin{array}{l} X_{65} \\ Y_{65} \\ Z_{35} \end{array} \right\} \\ \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{matrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})}$$

On applique le PFS à 5.

L'équation de résultante en projection sur $(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$ donne

$$\begin{cases} X_{35} + X_{65} = 0 \\ Y_{h5} + Y_{65} = 0 \\ Z_{35} + Z_{65} = 0 \end{cases}$$

L'équation de moment en B s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{M}_B(3/5) + \vec{M}_B(h/5) + \vec{M}_B(6/5) &= \vec{0} \\ \vec{M}_B(3/5) + \vec{M}_A(6/5) + \vec{BA} \wedge \vec{R}(6/5) &= \vec{0} \end{aligned}$$

On pose $\overline{BA} = d\vec{y}$ et on projette l'équation sur $(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$

$$\begin{cases} L_{35} + dZ_{65} = 0 \\ N_{35} - dX_{65} = 0 \end{cases}$$

Pour minimiser les efforts de 3 sur 5, il faut minimiser d et donc prendre $A = B$ ce qui semble être le cas.

15. La fermeture de chaîne géométrique conduit à

$$\begin{aligned} \overline{O_6A} &= \overline{O_6O_0} + \overline{O_0A} \\ r\vec{y}_6 &= -e\vec{y}_0 + l\vec{y} \\ \begin{cases} r \cos \alpha = -e + l \cos \theta \\ r \sin \alpha = l \sin \theta \end{cases} \end{aligned}$$

Soit

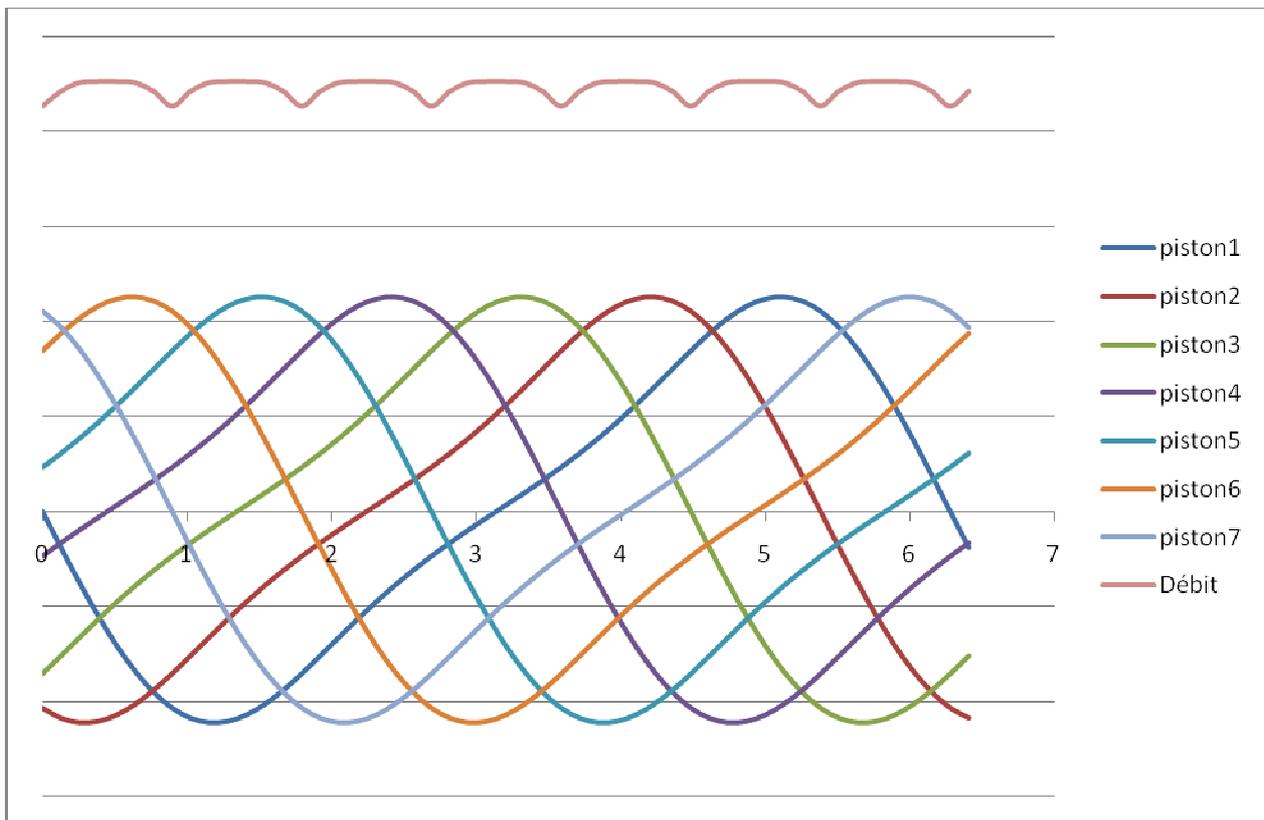
$$r^2 = l^2 + e^2 - 2el \cos \theta$$

On dérive

$$0 = 2l\dot{l} + 2el\dot{\theta} \sin \theta - 2e\dot{l} \cos \theta$$

Donc

$$\dot{l} = \frac{el \sin \theta}{e \cos \theta - l} \dot{\theta}$$



16. Cylindrée de la pompe : $Cyl = Nbpistons \cdot Course \cdot Section$

$$Cyl = 7 \cdot 2e \cdot \pi \frac{D^2}{4} \quad \text{AN : } Cyl = 63,3 \text{ cm}^3$$

17. Le système fonctionne à 270 bars. Pour cette pression, et pour 63 cm³ de cylindrée, la puissance consommée est d'environ $P_{pompe} = 45 \text{ kW}$ (doc 4). Pour ce type de pompe, le rendement est d'environ $\eta_t = 0,88$ (doc 4). Ainsi

l'installation comportant 4 pompes (2 par moteur) elle consommera $P_{inst} = 4 \frac{P_{pompe}}{\eta_t}$ AN : $P_{inst} = 205 \text{ kW}$

Étude des vérins de charge de l'éprouvette

18. 8 : distributeur 3/2 monostable commandé par un électroaimant.

12 : limiteur de pression réglable.

54 : Pompe hydraulique à un sens alimenter par un moteur électrique.

19. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble {tige+piston} en translation de tige dans le sens positif de \vec{y} en faisant l'hypothèse que le mouvement est uniforme (accélération nulle) conduit en projection sur \vec{y} à :

$$SP_a - SP_b - F_e = 0$$

20. En considérant que $Q_a = Q_b$, on a $\frac{dy}{dt} = \frac{Q(t)}{S}$

Avec les relations dans le distributeur il vient $P_p - P_a(t) = P_b(t)$.

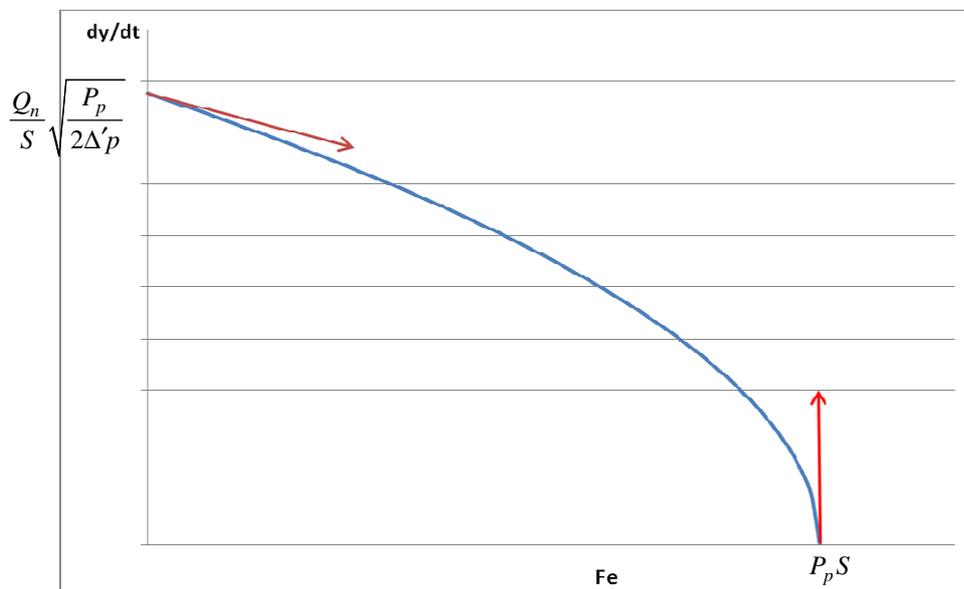
Avec l'équation issue du PFD on a : $P_p + \frac{F_e}{S} = 2P_a$.

Finalement,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Q_n}{S} \sqrt{\frac{SP_p - F_e}{2S\Delta'p}}$$

21. Tracer la courbe $\frac{dy(t)}{dt} = f(F_e)$.

F_e	0		$P_p S$
$\frac{d}{dF_e} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right]$	$-\frac{Q_n}{2S^2 \sqrt{2P_p \Delta'p}}$	Négative	$-\infty$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$\frac{Q_n}{S} \sqrt{\frac{P_p}{2\Delta'p}}$		0



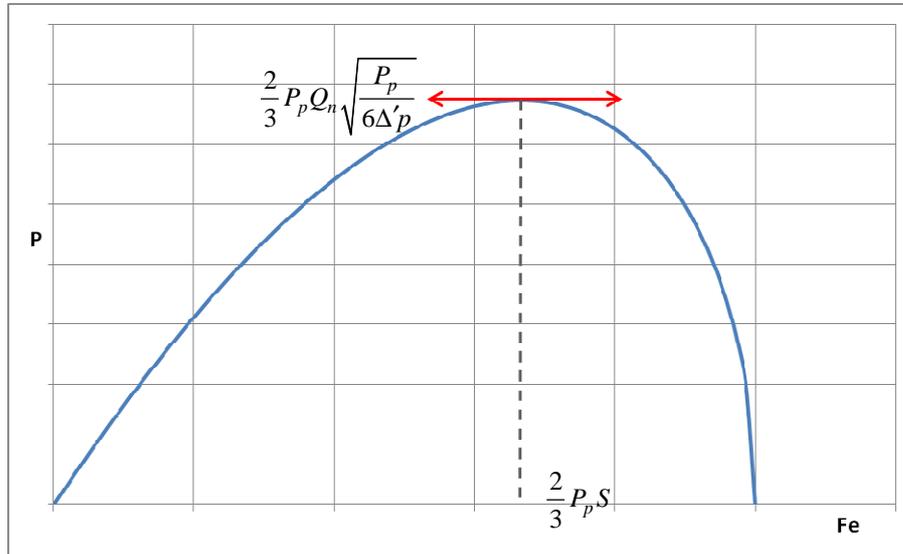
22. La puissance des efforts extérieurs à l'ensemble { piston + tige } est

$$P_{ex} = F_e \cdot \frac{dy}{dt} = F_e \cdot \frac{Q_n}{S} \sqrt{\frac{SP_p - F_e}{2S\Delta'p}}$$

En considérant que $\mathcal{P} = P_{ex}$,

$$\frac{d\mathcal{P}}{dF_e} = \frac{[2SP_p - 3F_e] Q_n}{2S\sqrt{2S\Delta'_p(SP_p - F_e)}}$$

Ainsi, on a $\frac{d\mathcal{P}}{dF_e} = 0$ pour $2SP_p - 3F_e = 0$ soit $F_e = \frac{2}{3}SP_p$



23. Pour travailler au régime optimal du vérin, il faut que le vérin ait une section utile $S = \frac{3(F_e)_{\max}}{2P_p}$ soit

$$S = \frac{3 \cdot 6667}{2 \cdot 270 \cdot 10^5} = 0.00037 \text{ m}^2 \quad \boxed{S = 3700 \text{ mm}^2}$$

Le vérin choisi a un diamètre intérieur $D = \varnothing 100$ et un diamètre de tige $d = \varnothing 70$ soit une section $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$

AN $\boxed{S = 4005 \text{ mm}^2}$. Le vérin est compatible avec les performances.

Étude de l'asservissement en vitesse des vérins de charge de l'éprouvette

24. La fonction de transfert est d'ordre 2. Son gain statique est $\frac{1}{S}$ donc plus la section du vérin sera grande, plus le système sera lent.

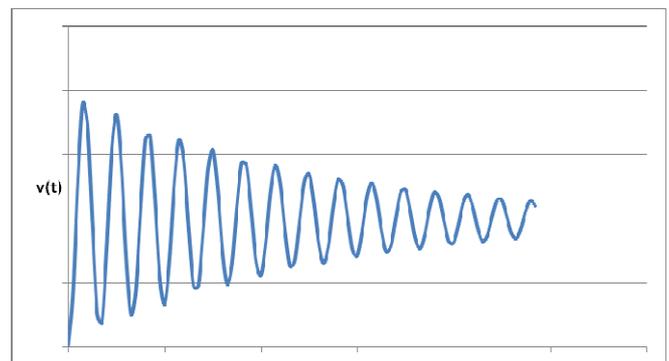
25. Application numérique :

$$R_h = \pi \cdot (0.1^2 - 0.07^2) \frac{1.4 \cdot 10^9}{0.25} = 8.97 \cdot 10^7 ;$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_h}{M_e}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = 94.7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

$$\xi = \frac{f \cdot \omega_0}{2R_h} \quad \text{soit} \quad \boxed{\xi = 0.021}$$

Le coefficient d'amortissement est très petit ce qui conduit à une réponse temporelle très oscillante.



26. Solution 1 : La phase dépasse les 90° et la réponse temporelle présente un dépassement donc on assimile le système à un second ordre.

Solution 2 : On a un système qui admet pour une pulsation de coupure à -3dB de 80Hz un déphasage de -45° on peut donc approximer le système à un premier ordre.

27. Pour les deux modèles, pour un courant de 300mA, on obtient un débit de 20 l/min donc le gain statique est

$$K = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot 300 \cdot 10^{-3}} \text{ soit } K = 1,11 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$$

Solution 1 : On a une phase de -90° pour une fréquence d'environ 123Hz soit $\omega_0 = 773 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Un temps de réponse à 5% de 6 ms ce qui conduit (avec un diagramme $\omega_0 t_{5\%}(\xi)$ non donné) à un coefficient d'amortissement $\xi = 0,9$ (si on suit l'énoncé, on peut prendre $\xi = 0,6$, pourtant le système ne semble pas résonnant)

$$\text{Donc } \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{1,11 \cdot 10^{-3}}{1 + 2,33 \cdot 10^{-3} p + \left(\frac{p}{773}\right)^2}$$

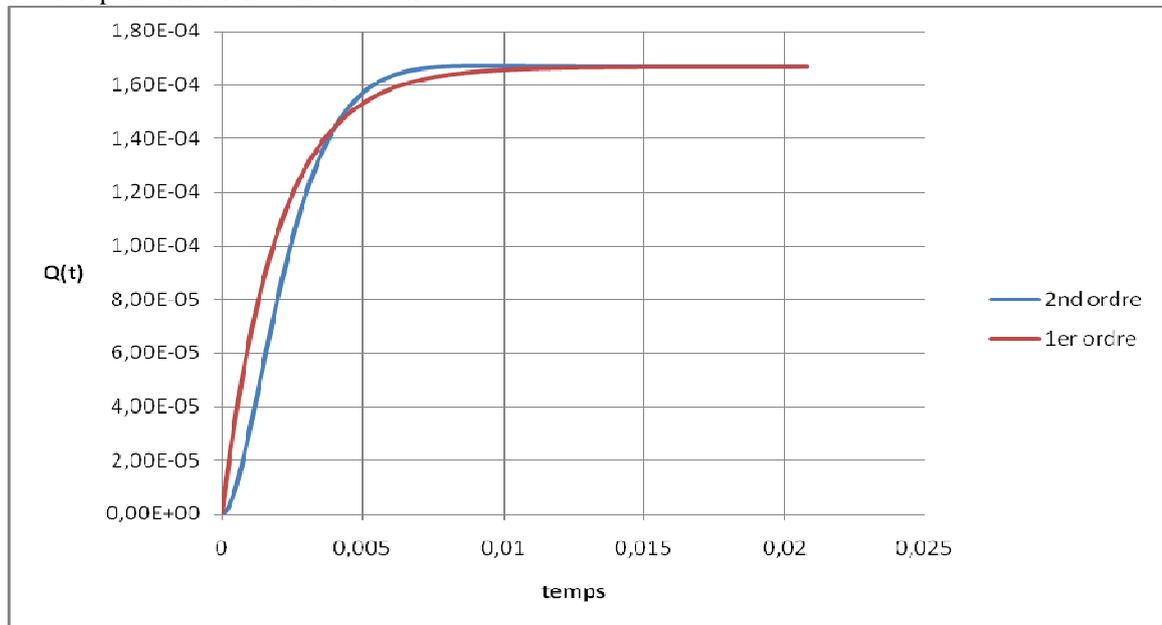
Solution 2 : La constante de temps est donnée

- soit par la pulsation de coupure à -3dB $\omega_c = \frac{1}{\tau} = 2 \cdot \pi \cdot 80$ qui conduit à $\tau = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

- soit par le temps de réponse à 5% qui vaut $t_{5\%} = 3\tau = 6 \cdot 10^{-3} \text{ s}$.

$$\text{Donc } \frac{Q(p)}{I(p)} = \frac{1,11 \cdot 10^{-3}}{1 + 2 \cdot 10^{-3} p}$$

28. Tracé de la réponse indicielle dans les deux cas



29. Le vérin travail avec une pulsation de $\omega_0 = 94,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ pendant que la servovalve travail à une pulsation supérieure à $500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Autrement dit le temps caractéristique de la servovalve est très petit devant celui du vérin. La servovalve peut donc être assimilable à un gain pur.

30. $G(p) = \frac{K_a K_s}{S \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$. le gain en boucle ouverte est donc $\frac{K_a K_s}{S}$. Le système est de classe 0 donc l'erreur statique est $\varepsilon_s = \frac{E_0}{1 + \frac{K_a K_s}{S}}$.

$$31. H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K_a K_s}{K_a K_s + S \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

$$H(p) = \frac{\frac{K_a K_s}{K_a K_s + S}}{\left(1 + \frac{2S\xi}{(K_a K_s + S)\omega_0} p + \frac{Sp^2}{(K_a K_s + S)\omega_0^2} \right)}$$

32. On a un système du second ordre de :

- pulsation propre : $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{K_a K_s + S}{S}}$;

- de coefficient d'amortissement $\xi_1 = \frac{\xi \sqrt{S}}{\sqrt{K_a K_s + S}}$

On veut un système sans dépassements soit $\xi_1 = 1$, ce qui conduit à $K_a = \frac{S(\xi^2 - 1)}{K_s}$

Application numérique : sachant que $S = 4000 \text{ mm}^2$; $\xi = 0,021$ et $K = 1,11 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ A}^{-1}$

$$K_a = -3,6$$