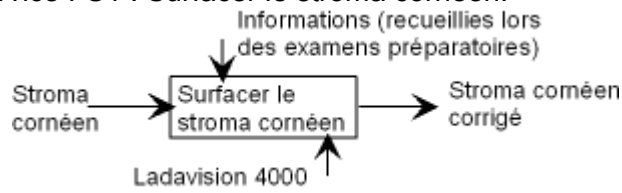
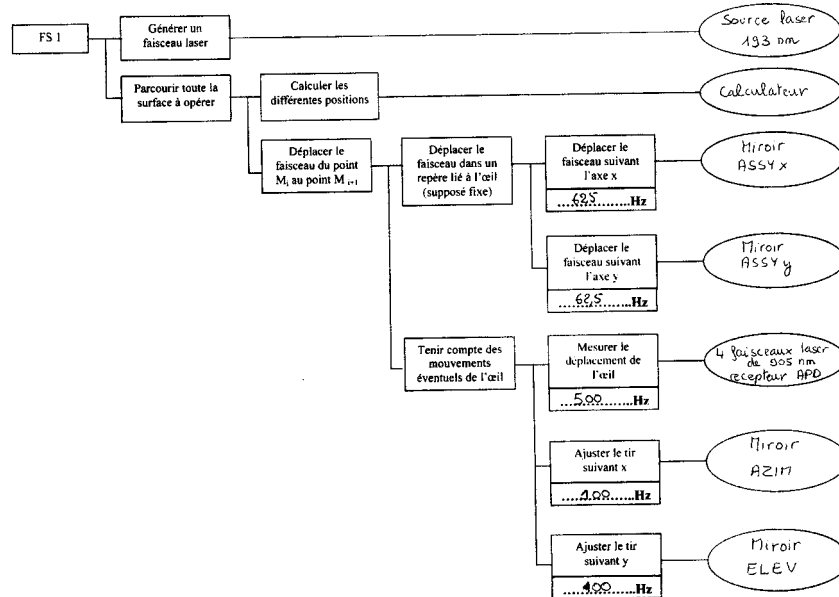


ENS PSI 2004 LADARVISION 4000

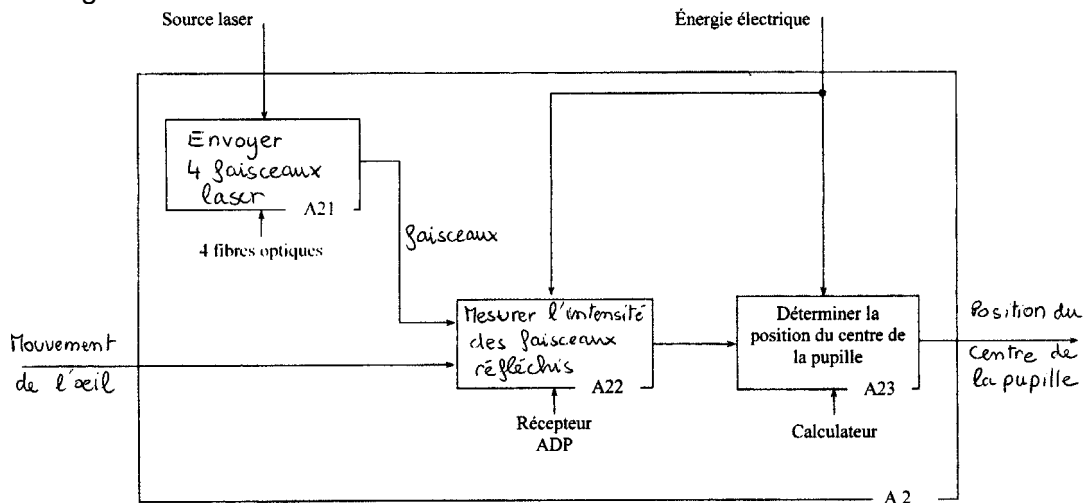
- Q1.** Produits commercialisés : lunettes, lentilles de contact ...
Q2. Fonction de service FS1 : Surfer le stroma cornéen.



- Q3.** Diagramme FAST :



- Q4.** Diagramme SADT A2 :

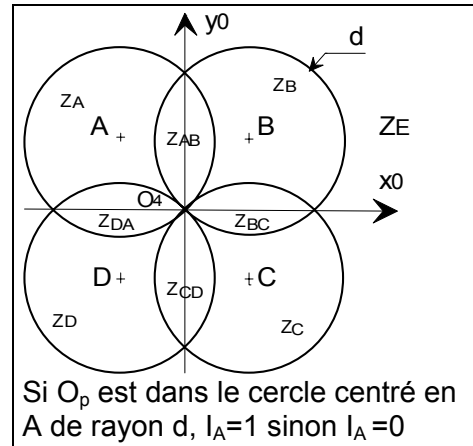


- Q5.** Les hypothèses de l'énoncé (le diamètre du cercle circonscrit aux faisceaux est égal au diamètre de la pupille, $I_i=1$ si le faisceau i traverse complètement ou partiellement la pupille) impliquent, dans le cas où le centre de la pupille coïncide avec l'intersection des diagonales du carré, que les variables I_i soient toutes vraies (ce qui rend curieux la fin de l'énoncé de la question 6).

Si les quatre intensités sont nulles pendant l'étape 4, cela signifie que la distance entre le centre de la pupille et l'intersection des diagonales est très importante (panne de la chaîne d'action, déplacement de l'œil avec une vitesse ou une amplitude anormale) ou que le capteur est défaillant. D'où l'interruption de l'étape 4.

Q6. Le schéma ci-contre permet de visualiser l'état des variables binaires I_i en fonction de la position du point O_p dans le plan $(O_4, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

Les 4 variables binaires I_i permettent de déterminer dans laquelle des neuf zones $Z_A, Z_B, Z_C, Z_D, Z_{AB}, Z_{BC}, Z_{CD}, Z_{DA}$ et Z_E est situé le point O_p . Elles ne permettent pas de déterminer les signes de $\vec{O}_4 O_p \cdot \vec{x}_0$ et $\vec{O}_4 O_p \cdot \vec{y}_0$



Q7. Dans le cas où la distance entre O_4 et O_p est très petite par rapport à d , O_p se situera principalement dans les zones Z_{AB}, Z_{BC}, Z_{CD} et Z_{DA} . O_p est dans la zone Z_{AB} si $I_A=1, I_B=1, I_C=0, I_D=0$.

Il serait possible de mettre en place une commande où serait piloté un déplacement de O_4 « d'un pas » suivant les x positifs lorsque O_p est dans la zone Z_{BC} (suivant les y positifs lorsque O_p est dans la zone Z_{AB}, \dots) avec de rapides itérations. Cela implique de mettre en œuvre des actionneurs « pas à pas » permettant une rotation des miroirs de très faible amplitude.

Q8. L'énoncé semble suggérer l'abandon de la commande séquentielle ci-dessus au bénéfice d'un asservissement.

Q9. Le second modèle permet la mesure de la position de O_p plutôt que sa simple localisation dans une zone.

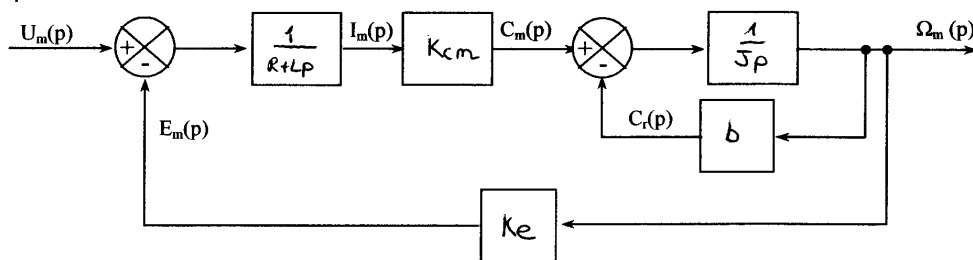
Q10. Si le diamètre de la pupille est inconnu trois capteurs suffisent.

Si le diamètre de la pupille a été mesuré préalablement deux capteurs suffisent. Ne pas approcher la configuration où les capteurs sont alignés (deux solutions possibles, mauvaise précision).

Q11. Equations du moteur à courant continu commandé par l'induit :

- Equation mécanique : $C_m(t) - b\omega_m(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt}$
- Equation électrique : $u_m(t) = R i_m(t) + e_m(t) + L \frac{d i_m(t)}{dt}$
- Equations de couplage : $e_m(t) = K_e \omega_m(t)$ $C_m(t) = K_{cm} i_m(t)$

La représentation graphique de la transformée de Laplace dans les conditions d'Heaviside de ces équations donne le schéma-bloc :



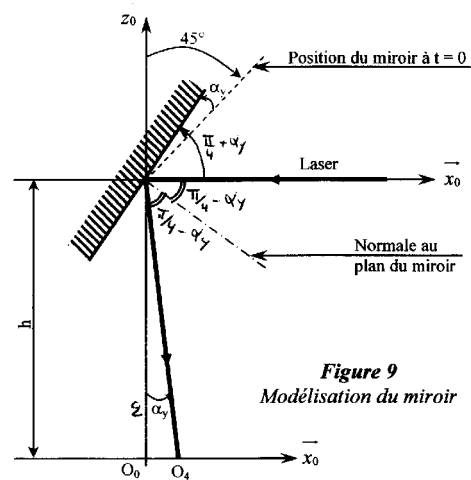
$$\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{K_{cm}}{K_{cm}K_e + bR}}{1 + \frac{JR + bL}{K_{cm}K_e + bR}p + \frac{JL}{K_{cm}K_e + bR}p^2}$$

Q12. Après correction de l'énoncé (voir ci-contre) : $x_4 = h \cdot \tan(2\alpha_y)$.
Le développement au premier ordre donne :
 $x_4 = 2h\alpha_y$.

D'autre part $\omega_m(t) = \frac{d\alpha_y(t)}{dt}$

Après transformation de Laplace dans les conditions d'Heaviside :

$$\frac{x_4(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{2h}{p}$$



Q13. L'énoncé suggère que $\vec{O}_{oeil} \vec{O}_p \cdot \vec{x}_0 = x_p$. Si tel est le cas $x_p = (R_{oeil} - \mu) \sin(\theta_y)$.

Le développement au premier ordre donne : $x_p = (R_{oeil} - \mu) \theta_y$. D'autre part $\omega_{yoeil}(t) = \frac{d\theta_y(t)}{dt}$.

Après transformation de Laplace dans les conditions d'Heaviside :

$$\frac{x_p(p)}{\Omega_{yoeil}(p)} = \frac{R_{oeil} - \mu}{p}$$

Q14. Fonction de transfert en boucle ouverte :

$$FTBO(p) = K_c \cdot \frac{\frac{K_{cm}}{K_{cm}K_e + bR}}{1 + \frac{JR + bL}{K_{cm}K_e + bR} p + \frac{JL}{K_{cm}K_e + bR} p^2} \cdot \frac{2h}{p} = \frac{K_{BO}}{p \left(1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

avec $K_{BO} = \frac{2hK_cK_{cm}}{K_{cm}K_e + bR}$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{cm}K_e + bR}{JL}}$ $m = \frac{JR + bL}{2\sqrt{JL(K_{cm}K_e + bR)}}$

$$H_{oeil}(p) = \frac{R_{oeil} - \mu}{p} = \frac{K_{oeil}}{p}$$

avec $K_{oeil} = R_{oeil} - \mu$

Q15. Marge de gain (en dB) : $M_g = -20 \log |FTBO(j\omega_1)|$ avec ω_1 tel que $\text{Arg}(F(j\omega_1)) = -\pi$.

Ici $\omega_1 = \omega_0$ et donc $M_g = -20 \log |FTBO(j\omega_0)| = -20 \log \left(\frac{K_{BO}}{2 \cdot m \cdot \omega_0} \right)$

$M_g = 60 \text{dB}$ ce qui assure une bonne stabilité

Q16. Ecart statique en position : $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_p(t) - x_4(t))$ pour un échelon $x_p(t) = x_{p0} \cdot u(t)$ en entrée. Avec une fonction de transfert en boucle ouverte de classe 1, l'écart statique est nul.

Q17. Nous allons calculer la réponse temporelle du système à un échelon d'amplitude x_{p0} . La fonction de transfert en boucle fermée est :

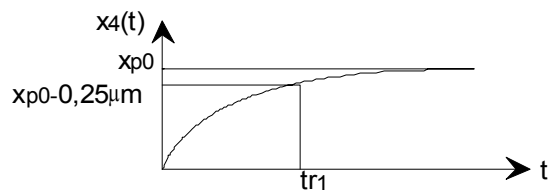
$$H(p) = \frac{X_4(p)}{X_p(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{BO}}} \text{ avec } FTBO(p) = K_{BO}/p.$$

Donc $X_4(p) = \frac{x_{p0}}{\left(1 + \frac{p}{K_{BO}}\right)p}$ et donc $x_4(t) = x_{p0}(1 - e^{-K_{BO}t})$ pour $t > 0$.

Le temps de réponse est la date pour laquelle $x_{p0} - x_4(tr) = 0,25\mu\text{m}$.

$$tr_1 = -\frac{1}{K_{BO}} \ln\left(\frac{0,25\mu\text{m}}{x_{p0}}\right)$$

Pour $x_{p0} = 1\text{mm}$
 $tr_1 = 8,3\text{s}$



Q18. Le système semble satisfaisant en terme de stabilité (marge de gain de 60dB) et en terme de précision (écart statique nul). Par contre il est beaucoup trop lent.

Q19. Un correcteur proportionnel permet d'améliorer la rapidité du système (gain supérieur à un) en détériorant cependant la stabilité. La marge de stabilité étant très importante ce choix semble pertinent.

Un correcteur à action intégrale n'est pas justifié, la classe 1 du système non corrigé assurant une précision suffisante (écart statique nul).

La marge de gain du système non corrigé étant de 60 dB, la marge de gain visée pour le système corrigé étant de 13dB, le gain du correcteur doit être de 47dB.

$$K_{cor} = 224$$

Q20. Le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée est $K_{BOc} = K_{BO}K_{cor} = 224\text{s}^{-1}$. Le temps de réponse est alors :

$$tr_2 = -\frac{1}{K_{BOc}} \ln\left(\frac{0,25\mu\text{m}}{x_{p0}}\right) \quad \text{pour } x_{p0} = 1\text{mm} \quad tr_2 = 3,7 \cdot 10^{-2}\text{s}$$

Les tirs sont effectués à la fréquence de 62,5Hz, soit une période de $1,6 \cdot 10^{-2}\text{s}$ (inférieure à tr_2). La précision ne sera pas suffisante, si l'œil se déplace d'un échelon d'amplitude 1mm entre deux tirs.

Q21. FT1 : Ajuster la longueur $AC=BD$ au diamètre de la pupille.

FT12 : Modifier la longueur $AC=BD$.

FT2 : Placer O_4 en O_p .

FT22 : Modifier la position de O_4 .

Q22. On note :

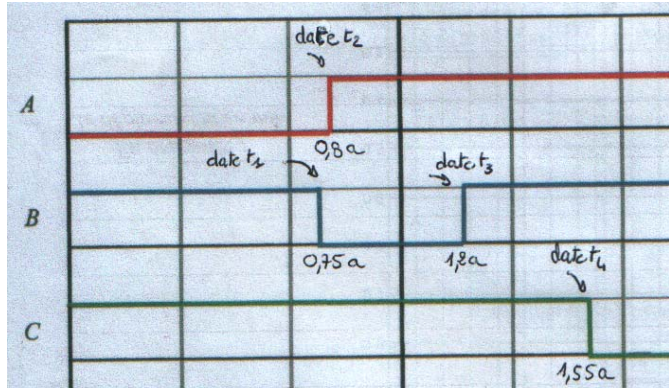
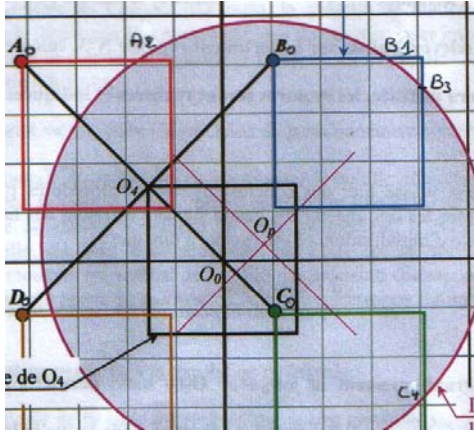
- A_0, B_0, C_0 les positions des points A, B, C à la date t_0 correspondant au début de la mesure.
- B_1 la position de B à la date t_1 correspondant au front descendant de I_B .
- A_2 la position de A à la date t_2 correspondant au front montant de I_A .
- B_3 la position de B à la date t_3 correspondant au front montant de I_B .
- C_4 la position de C à la date t_4 correspondant au front descendant de I_C .

Les coordonnées d'un point K dans le repère $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ sont notées :

$$x_K = \overrightarrow{O_0K} \cdot \vec{x}_0 \quad \text{et} \quad y_K = \overrightarrow{O_0K} \cdot \vec{y}_0.$$

Le centre de la pupille O_p est l'intersection des bissectrices des segments $[A_2B_1]$ et $[B_3C_4]$.

$$\text{Donc } x_{O_p} = \frac{x_{A_2} + x_{B_1}}{2} \quad \text{et} \quad y_{O_p} = \frac{y_{B_3} + y_{C_4}}{2}$$



En utilisant les relevés, on déduit que : $\overrightarrow{A_0A_2} \cdot \vec{x}_0 = 0,8a$, $\overrightarrow{B_0B_1} \cdot \vec{x}_0 = 0,75a$,
 $\overrightarrow{B_0B_3} \cdot \vec{y}_0 = 0,2a$, $\overrightarrow{C_0C_4} \cdot \vec{y}_0 = 0,55a$

On peut alors déduire : $x_{O_p} = (-a + 1,55a)/2 = 0,275a$ et $y_{O_p} = (a - 0,75a)/2 = 0,125a$
 $x_{O_p} = 0,825mm$ et $y_{O_p} = 0,375mm$

Mais il reste du travail avant de construire un algorithme complet permettant la détermination de la position O_p .

Q23. Le diamètre D_p peut par exemple être déduit de la distance entre O_p et B_1 .

$$D_p = 2 \left\| \overrightarrow{O_p B_1} \right\| = 2 \sqrt{(x_{B_1} - x_{O_p})^2 + (y_{B_1} - y_{O_p})^2}$$

avec $x_{B_1} = -\frac{a}{2} + \frac{d}{2\sqrt{2}} + 0,75a = 3,22mm$ et $y_{B_1} = \frac{a}{2} + \frac{d}{2\sqrt{2}} = 3,97mm$

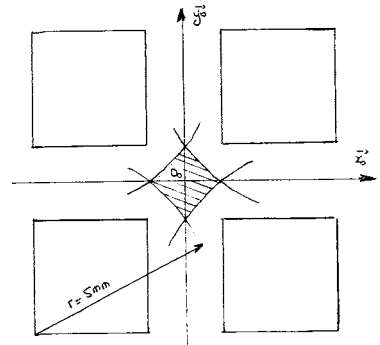
donc $D_p = 8,66 mm$

Q24. Deux cas sont à éviter :

- le cas où un faisceau reste dans la pupille,
- le cas où un faisceau reste hors de la pupille.

Le premier cas est le plus restrictif (il l'est particulièrement pour les grandes pupilles (10 mm).

La zone ci-contre correspondant aux positions possibles de O_p . O_p est toujours inclus dans cette zone si la distance O_0O_p est inférieure à 0,62 mm.



Q25. Besoin satisfait par le mécanisme : déplacer la table sur laquelle est allongé le patient.

Q26. $v(v/0) = \begin{Bmatrix} \omega_{v0} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ $v(t/0) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -v_{t0} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$ $v_{t0} = \frac{p}{2\pi} \omega_{v0}$

Q27. Notons $\vec{q}(e \rightarrow v)(M) = \vec{q}_n(M) + \vec{q}_t(M)$ la densité surfacique d'action mécanique de l'écrou sur la vis en M.

Dans l'énoncé, est utilisée la notation $d\vec{N} = \vec{q}_n(M)ds$ et $d\vec{T} = \vec{q}_t(M)ds$.

La composante normale de la densité surfacique d'action mécanique de l'écrou sur la vis en M est portée par \vec{z}_3 .

$\vec{q}_n(M) = q_n(M) \vec{z}_3$ avec $q_n(M) < 0$ (contact sur la face supérieure du filet).

Q28. Le contact en M de normale \vec{z}_3 permet d'écrire : $\vec{v}(M \in v/t) \cdot \vec{z}_3 = 0$.

Ce qui revient à écrire : $\vec{v}(M \in v/t) = u\vec{x}_3 + v\vec{y}_2$.

Par composition de vitesse : $\vec{v}(M \in v/t) = \vec{v}(M \in v/O) - \vec{v}(M \in t/O)$

Avec Q26 $u\vec{x}_3 + v\vec{y}_2 = \omega_{v0} r_{moy} \vec{y}_1 + v_{t0} \vec{z}_0$

En projetant cette équation sur \vec{z}_3 on obtient l'équation $v_{t0} = \omega_{v0} r_{moy} \tan(i)$ qui permet de retrouver l'équation de la question 26.

En projetant sur \vec{x}_3 on obtient $u=0$. La vitesse $\vec{v}(M \in v/t)$ est donc bien colinéaire à \vec{y}_2 .

En projetant sur \vec{y}_2 on obtient $v = \omega_{v0} r_{moy} \cos(i) + v_{t0} \sin(i) = \frac{\omega_{v0} r_{moy}}{\cos(i)}$ d'où $v > 0$.

D'après les lois de Coulomb la composante tangentielle de la densité surfacique d'action mécanique de l'écrou sur la vis en M, $\vec{q}_t(M)$, et la vitesse de glissement en M, $\vec{v}(M \in v/t)$, sont alignées et de sens contraires.

Donc $\vec{q}_t(M) = q_t(M) \vec{y}_2$ avec $q_t(M) < 0$

D'après les lois de Coulomb $\left| \frac{q_t(M)}{q_n(M)} \right| < f$ donc $q_t(M) = f \cdot q_n(M)$.

La densité surfacique d'action mécanique de l'écrou sur la vis en M s'écrit donc :

$$\vec{q}(e \rightarrow v)(M) = q_n(M) (\vec{z}_3 + f \vec{y}_2)$$

Q29. Résultante de l'action de l'écrou sur la vis : $\vec{R}(e \rightarrow v) = \int_{M \in \text{filet}} \vec{q}(e \rightarrow v)(M) ds$

$$Z_{e \rightarrow v} = \vec{z}_0 \cdot \vec{R}(e \rightarrow v) = \int_{M \in \text{filet}} \vec{z}_0 \cdot \vec{q}(e \rightarrow v)(M) ds = (\cos(i) \cdot \cos(\alpha) + f \cdot \sin(i)) \int_{M \in \text{filet}} q(M) ds$$

$$Z_{e \rightarrow v} = A \cdot \int_{M \in \text{filet}} q(M) ds \quad \text{avec} \quad A = \cos(i) \cdot \cos(\alpha) + f \cdot \sin(i)$$

Q30. Moment en O de l'action de l'écrou sur la vis : $\vec{M}_O(e \rightarrow v) = \int_{M \in \text{filet}} \vec{OM} \wedge \vec{q}(e \rightarrow v)(M) ds$

$$N_{e \rightarrow v} = \vec{z}_0 \cdot \vec{M}_O(e \rightarrow v) = \int_{M \in \text{filet}} \vec{z}_0 \cdot (\vec{OM} \wedge \vec{q}(e \rightarrow v)(M)) ds = r_{moy} (f \cdot \cos(i) - \cos(\alpha) \cdot \sin(i)) \int_{M \in \text{filet}} q(M) ds$$

$$N_{e \rightarrow v} = B \cdot \int_{M \in \text{filet}} q(M) ds \quad \text{avec} \quad B = r_{moy} (f \cdot \cos(i) - \cos(\alpha) \sin(i))$$

Q31.
$$\frac{N_{e \rightarrow v}}{Z_{e \rightarrow v}} = r_{moy} \frac{\tan(\Phi) - \tan(i)}{1 + \tan(\Phi) \cdot \tan(i)} = r_{moy} \cdot \tan(\Phi - i)$$

Remarque : pour une liaison parfaite $\Phi = 0$ et $\frac{N_{e \rightarrow v}}{Z_{e \rightarrow v}} = -\frac{p}{2\pi} = -r_{moy} \cdot \tan(i)$

Q32. Le système vis-écrou est irréversible si une action mécanique appliquée à l'écrou n'est pas capable de susciter son mouvement (sans qu'une action soit appliquée à la vis).

Etudions le cas où le système vis-écrou, constitué de la vis (v) de l'écrou (e) et du bâti (0), est à la limite du glissement. L'écrou est soumis à un glisseur de support ($O\vec{z}_0$) et de

résultante $\vec{R}(\text{ext} \rightarrow e) = Rz_0$ avec $R < 0$. Le résultat de la question 31 est dans ces conditions toujours licite.

Du PFS appliqué à la vis puis à l'écrou est déduit : $Z_{e \rightarrow v} = R \neq 0$ et $N_{e \rightarrow v} = 0$.

Un système vis-écrou est donc à la « limite de l'irréversibilité » si $\tan(\Phi - i) = 0$ c'est-à-dire si $\Phi = i$.

Le système sera donc irréversible pour un facteur de frottement supérieur : $\boxed{\Phi \geq i}$.

Q33. Moment d'inertie, par rapport à son axe, d'un cylindre de rayon r_{moy} et de masse m_v :

$$\boxed{I = \frac{m_v r_{\text{moy}}^2}{2}} \quad I = 84,5 \text{ Kg.mm}^2$$

Q34. Théorème du moment dynamique, en O, en projection sur \vec{z}_0 , appliqué au solide vis+rotor (v) :

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_0(v/R_0) = \vec{z}_0 \cdot \vec{M}_0(0 \rightarrow v) + \vec{z}_0 \cdot \vec{M}_0(\text{Pes} \rightarrow v) + \vec{z}_0 \cdot \vec{M}_0(e \rightarrow v)$$

$$(I + J)\dot{\omega}_{v0} = 0 + 0 + N_{e \rightarrow v}$$

$$\text{Avec la question 26 : } \dot{\omega}_{v0} = \frac{2\pi}{p} \dot{v}_{t0}$$

Avec la question 31 (l'énoncé indique que toutes les liaisons sont supposées parfaites, cependant, tout laisse à croire que la liaison vis-écrou est « à part » ...) :

$$N_{e \rightarrow v} = r_{\text{moy}} \cdot \tan(\Phi - i) \cdot Z_{e \rightarrow v}$$

$$\text{On en déduit : } Z_{e \rightarrow v} = (I + J) \frac{2\pi}{p \cdot r_{\text{moy}} \cdot \tan(\Phi - i)} \dot{v}_{t0} = (I + J) \left(\frac{2\pi}{p} \right)^2 \frac{\tan(i)}{\tan(\Phi - i)} \dot{v}_{t0}$$

Cette action mécanique est identique pour les quatre systèmes vis-écrou.

Théorème de la résultante dynamique, en projection sur \vec{z}_0 , appliqué au solide table+patient (t) :

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{R}_d(t/R_0) = \vec{z}_0 \cdot \vec{R}(0 \rightarrow t) + \vec{z}_0 \cdot \vec{R}(\text{Pes} \rightarrow t) + \sum_i \vec{z}_0 \cdot \vec{R}(v_i \rightarrow t)$$

$$-M\dot{v}_{t0} = 0 - Mg - 4Z_{e \rightarrow v}$$

En éliminant $Z_{e \rightarrow v}$ dans ces deux équations $\left[M - 4(I + J) \cdot \left(\frac{2\pi}{p} \right)^2 \cdot \frac{\tan(i)}{\tan(\Phi - i)} \right] \dot{v}_{t0} = Mg$

$$\boxed{\dot{v}_{t0} = \frac{Mg}{M - 4(I + J) \cdot \left(\frac{2\pi}{p} \right)^2 \cdot \frac{\tan(i)}{\tan(\Phi - i)}} = A = \text{constante}} \quad A = -0,4 \text{ m.s}^{-2}$$

Remarque : pour une liaison glissière hélicoïdale parfaite ($\Phi = 0$) le résultat est immédiatement trouvé en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble des pièces mobiles.

Q35. En intégrant : $v_{t0} = A \cdot t + V_i$ donc le temps d'arrêt est $t_a = -\frac{V_i}{A}$ $t_a = 50 \text{ ms}$

$$\text{Distance d'arrêt : } d_p = \frac{A \cdot t_a^2}{2} + V_i \cdot t_a = -\frac{V_i^2}{2A} \quad \boxed{d_p = 0,5 \text{ mm}}$$

Q36. La précision est juste suffisante.

Q37. Voir question 3.

Q38. Avec la loi de commande proposée :

$$\ddot{\theta} = \frac{\omega_{\max}}{t_1} \text{ pour } t \in [0, t_1] \quad \text{et} \quad \theta_f = \omega_{\max}(T - t_1)$$

Q39. Théorème du moment dynamique en O en projection sur \vec{Z} appliqué au solide $S = \{\text{miroir} + \text{rotor}\}$:

$$\vec{Z} \cdot \delta_0 (v/R_0) = \vec{Z} \cdot \vec{M}_0 (0 \rightarrow S) + \vec{Z} \cdot \vec{M}_0 (\text{Pes} \rightarrow S) + \vec{Z} \cdot \vec{M}_0 (\text{Mot} \rightarrow S)$$

$$C_{m+r} \ddot{\theta} = 0 + 0 + C_m \text{ donc } \ddot{\theta}_{\max} = \frac{C_{m\max}}{C_{m+r}}$$

Application numérique :

La notice constructeur donne $C_m = 30 \text{ mN.m}$ et $J = 19 \text{ g.cm}^2$

Masse du miroir $m = \rho_v \cdot L \cdot l \cdot e \quad m = 2,25 \text{ g}$

Moment d'inertie $C_{m+r} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Kg.m}^2$

$$\ddot{\theta}_{\max} = 14,88 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-2}$$

En utilisant les résultats de la question précédente :

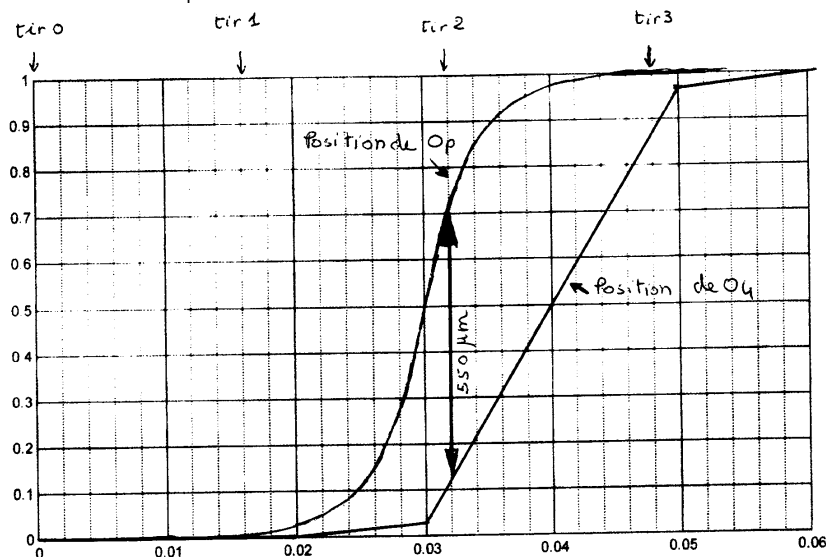
$$t_1 = \frac{\omega_{\max}}{\ddot{\theta}_{\max}} \quad t_1 = 2,11 \text{ ms}$$

$$\theta_f = \omega_{\max}(T - t_1) \quad \theta_f = 0,248 \text{ rad} \quad (\text{pour } T = 10 \text{ ms})$$

Déplacement de O_4 (voir question 12) : $x_4 = 2h \cdot \theta_f$

Je n'ai pas trouvé la valeur numérique de h....

Q40. Evolution de O_4 :



Q41. Pour le tir 2 (voir ci-dessus) la distance entre O_p et O_4 est de $550 \mu\text{m}$. La précision demandée de $0,25 \mu\text{m}$ est loin d'être atteinte.

Q42. La fréquence la plus « pénalisante » semble être la fréquence d'élaboration des consignes ELEV et AZIM.

Q43. A vos imaginations ...