CCP Physique 1 MP 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Lambert (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) et par Julie Zutter (Professeur en CPGE).

Comme tous les ans, la première épreuve de physique des CCP est composée d'une partie de mécanique et d'une partie de thermodynamique, de longueur et de difficulté sensiblement égales. Les deux problèmes ont en commun de se prêter à un traitement linéaire : les questions font systématiquement appel aux réponses des questions les ayant précédées. Il n'était donc guère envisageable de tenter de « grappiller des points » le jour J.

- La première partie est consacrée à la mécanique du solide ; ses deux sous-parties sont totalement indépendantes. Dans la première, il s'agit d'étudier la statique, puis la dynamique d'un wagonnet dont on adopte une description détaillée. Ceci fait appel à un grand nombre de théorèmes, mais ne comporte pas de difficulté majeure. Dans la deuxième sous-partie, on étudie la dynamique d'un disque roulant et glissant sur une surface plane, ce qui donne l'occasion de réviser les lois de Coulomb du frottement solide.
- La deuxième partie est consacrée à la thermodynamique. Il s'agit d'étudier de manière précise chacune des transformations imposées à un gaz, supposé parfait, dans un cycle moteur constitué de deux transformations monobares et d'une transformation adiabatique. Une quatrième transformation est étudiée en détail et l'on montre qu'il est possible de la fractionner en une suite de transformations adiabatiques et monobares, afin d'améliorer le rendement du cycle.

La rédaction du problème est claire et chacune des parties peut utilement servir aux révisions. En outre, la difficulté reste très mesurée : une bonne connaissance des (nombreux) théorèmes de base des cours de mécanique et de thermodynamique suffit presque à résoudre la totalité du sujet. En fait, le principal obstacle est la longueur de cette épreuve.

Indications

Mécanique

I.1.4 Simplifier au maximum les expressions sous forme vectorielle en tenant compte des symétries avant de projeter les vecteurs sur la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.

I.2.1 Écrire la loi de composition des vitesses pour les points d'une même roue.

I.2.2 Invoquer le théorème de Kœnig.

I.2.4 Utiliser la définition de la variation élémentaire de l'énergie potentielle comme l'opposée du travail infinitésimal fourni par le poids lors d'un déplacement de dX.

I.2.6 Les liaisons parfaites ne travaillent pas. En tenir compte dans le bilan énergétique des questions précédentes.

I.2.8 Quelle est la relation entre le moment dynamique et la dérivée temporelle du moment cinétique lorsque ceux-ci sont calculés par rapport au barycentre du système considéré ?

I.2.14 Revenir au résultat de la question I.1.1 pour éliminer b des expressions de N_1 et de N_2.

I.3.1 Utiliser la loi de composition des vitesses pour les points du disque.

I.3.4 Discuter le signe de N et T.

I.3.10 Que peut-on dire de la puissance des forces de frottement lorsqu'il n'y a pas glissement ?

Thermodynamique

II.1.2.2 L'énoncé ne précise pas clairement que ΔU est aussi fonction de la masse $m = 1$ kg d'air considérée. Faire appel à la première loi de Joule.

II.1.2.3 Ici aussi m doit intervenir dans l'expression de ΔH.

II.2.1.2.2 Q_{froid} est la somme de deux termes correspondant aux transferts thermiques durant les transformations $A \to B$ et $D \to A$.

II.2.1.2.4 L'entropie produite est la somme de deux termes, dont l'un n'est fonction que des caractéristiques des thermostats, et l'autre fonction du travail récupérable lors de la transformation $A \to B$.

I. Mécanique

I.1.1 Par définition, le centre d'inertie G du système {wagonnet+4 roues} vérifie

$$(\mathrm{M}+4m)\,\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \mathrm{M}\,\overrightarrow{\mathrm{OG_0}} + 4m\,\overrightarrow{\mathrm{OO_0}}$$

où $\mathrm{G_0}$ est le centre d'inertie du système benne-plateforme-essieux et $\mathrm{O_0}$ le centre d'inertie de l'ensemble des 4 roues. On projette cette relation sur $\overrightarrow{e_y}$ et on isole c :

$$\boxed{c = \frac{\mathrm{M}\,b + 4m\,r}{\mathrm{M}+4m}}$$

I.1.2 Effectuons dans un premier temps un bilan des forces exercées sur le wagonnet. Ces forces sont :

- Le poids total du wagonnet $\overrightarrow{\mathcal{P}_\mathrm{t}} = \mathrm{M_t}\,\overrightarrow{g}$. Dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$,
$$\overrightarrow{g} = -g\,(\sin\alpha\,\overrightarrow{e_x} + \cos\alpha\,\overrightarrow{e_y})$$
- Les réactions du support incliné en $\mathrm{I_1}$ et $\mathrm{I_4}$ d'une part :
$$\overrightarrow{\mathfrak{R}_1} = \overrightarrow{\mathfrak{R}_4} = \mathrm{T_1}\,\overrightarrow{e_x} + \mathrm{N_1}\,\overrightarrow{e_y}$$
et en $\mathrm{I_2}$ et $\mathrm{I_3}$ d'autre part,
$$\overrightarrow{\mathfrak{R}_2} = \overrightarrow{\mathfrak{R}_3} = \mathrm{N_2}\,\overrightarrow{e_y}$$

Appliquons le théorème de la résultante cinétique (TRC) à l'équilibre au wagonnet immobile :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{\mathcal{P}_\mathrm{t}} + \overrightarrow{\mathfrak{R}_1} + \overrightarrow{\mathfrak{R}_2} + \overrightarrow{\mathfrak{R}_3} + \overrightarrow{\mathfrak{R}_4}$$

On projette cette relation sur les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ pour obtenir

$$\boxed{0 = -\mathrm{M_t}\,g\sin\alpha + 2\,\mathrm{T_1}} \qquad \text{sur } \overrightarrow{e_x}$$

et

$$\boxed{0 = -\mathrm{M_t}\,g\cos\alpha + 2\,\mathrm{N_1} + 2\,\mathrm{N_2}} \qquad \text{sur } \overrightarrow{e_y}$$

I.1.3 D'après la question précédente, la projection sur $\overrightarrow{e_x}$ du TRC conduit à

$$\boxed{\mathrm{T_1} = \frac{\mathrm{M_t}\,g\sin\alpha}{2} = 52\ \mathrm{N}}$$

I.1.4 Le théorème du moment dynamique au wagonnet en $\mathrm{O_2}$ donne

$$\overrightarrow{\delta_{\mathrm{O_2}}} = \sum_j \overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{O_2}}}(\overrightarrow{\mathrm{F}_j})$$

où $\overrightarrow{\delta_{\mathrm{O_2}}}$ désigne le moment dynamique du système par rapport à $\mathrm{O_2}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{O_2}}}(\overrightarrow{\mathrm{F}_j})$ le moment de la force $\overrightarrow{\mathrm{F}_j}$ par rapport à $\mathrm{O_2}$. Puisque le moment dynamique en $\mathrm{O_2}$ est nul, la somme des moments des forces appliquées sur le solide est nulle, donc

$$\overrightarrow{\mathrm{O_2G}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{P}_\mathrm{t}} + \overrightarrow{\mathrm{O_2I_1}} \wedge \overrightarrow{\mathfrak{R}_1} + \overrightarrow{\mathrm{O_2I_4}} \wedge \overrightarrow{\mathfrak{R}_4} + \overrightarrow{\mathrm{O_2I_2}} \wedge \overrightarrow{\mathfrak{R}_2} + \overrightarrow{\mathrm{O_2I_3}} \wedge \overrightarrow{\mathfrak{R}_3} = \overrightarrow{0}$$

où l'on a tenu compte du fait que le point d'application de la force $\overrightarrow{\mathfrak{R}_j}$ est le point I_j. L'énoncé précise que $\overrightarrow{\mathfrak{R}_1} = \overrightarrow{\mathfrak{R}_4}$ et que $\overrightarrow{\mathfrak{R}_2} = \overrightarrow{\mathfrak{R}_3}$. On peut dès lors factoriser l'expression précédente

$$\overrightarrow{\mathrm{O_2G}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{P}_\mathrm{t}} + (\overrightarrow{\mathrm{O_2I_1}} + \overrightarrow{\mathrm{O_2I_4}}) \wedge \overrightarrow{\mathfrak{R}_1} + (\overrightarrow{\mathrm{O_2I_2}} + \overrightarrow{\mathrm{O_2I_3}}) \wedge \overrightarrow{\mathfrak{R}_2} = \overrightarrow{0}$$

On simplifie cette dernière expression en remarquant que O_2 est le milieu du segment $[I_2I_3]$, tandis que O_1 est le milieu de $[I_1I_4]$ pour écrire

$$\overrightarrow{O_2G} \wedge \overrightarrow{\mathcal{P}_t} + 2\,\overrightarrow{O_2O_1} \wedge \overrightarrow{\mathfrak{R}_1} = \overrightarrow{0}$$

Ces vecteurs sont tous contenus dans le plan xOy, ce qui implique que la résultante est colinéaire à $\overrightarrow{e_z}$:

$$(a\,\overrightarrow{e_x} + c\,\overrightarrow{e_y}) \wedge (-M_t\,g)(\sin\alpha\,\overrightarrow{e_x} + \cos\alpha\,\overrightarrow{e_y}) + 4\,a\,\overrightarrow{e_x} \wedge (T_1\,\overrightarrow{e_x} + N_1\,\overrightarrow{e_y}) = \overrightarrow{0}$$

qui donne $$[(-M_t\,g)\;(a\,\cos\alpha - c\,\sin\alpha) + 4\,a\,N_1]\;\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$$

On projette sur $\overrightarrow{e_z}$ et on isole N_1 pour obtenir

$$\boxed{N_1 = \frac{M_t g}{4}\left(\cos\alpha - \frac{c}{a}\sin\alpha\right)}$$

> Le théorème du moment dynamique est d'utilisation plus sûre que le théorème du moment cinétique car il reste valable même si le moment dynamique est calculé par rapport à un point mobile ; l'emploi du théorème de Kœnig permettant alors de se ramener à un point où le moment dynamique est plus facile à calculer.

I.1.5 L'expression de N_1 obtenue à la question précédente est injectée dans la relation obtenue à la question I.1.2 et N_2 est isolé pour obtenir

$$\boxed{N_2 = \frac{M_t g}{4}\left(\cos\alpha + \frac{c}{a}\sin\alpha\right)}$$

> On obtient un résultat bien connu des déménageurs : la charge se répartit équitablement sur l'avant et l'arrière si $\alpha = 0$, mais le fait que le centre d'inertie de l'objet transporté soit surélevé – ici de c – par rapport au support de l'objet dissymétrise la répartition de la charge lorsque l'objet est incliné. Cet effet est similaire à l'« effet levier ».

I.2.1 Décrivons le mouvement des points de la roue 1. L'ensemble est en rotation autour de G_1 à la vitesse angulaire $\omega\,\overrightarrow{e_z}$, ce qui implique que pour tout point M de la roue l'on a

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OG_1}}{dt} + \omega\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{G_1M}$$

La condition de roulement sans glissement implique qu'à tout instant la vitesse du point de la roue coïncidant avec I_1 est nulle. Il en résulte que, lorsque $M = I_1$,

$$\frac{d\overrightarrow{OG_1}}{dt} = -\omega\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{G_1I_1} \qquad \text{car} \quad \frac{d\overrightarrow{OI_1}}{dt} = \overrightarrow{0}$$

Puisque $\dfrac{d\overrightarrow{OG_1}}{dt} = \dfrac{dX}{dt}\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{G_1I_1} = -r\,\overrightarrow{e_y}$, il vient finalement

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = -r\,\omega}$$

> Il est conseillé de vérifier la pertinence de ce résultat : si $\omega > 0$ le wagonnet descend la pente ($dX/dt < 0$).